

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/360642727>

POREĐENJE REZULTATA SOPSTVENIH FREKVENCIJA KARBONSKIH NANOCIJEVI DOBIJENIH METODOM KONAČNIH ELEMENATA (MKE) I ANALITIČKOM METODOM CARBON NANOTUBES NATURAL FREQUENC....

Conference Paper · May 2022

CITATIONS

0

READS

38

5 authors, including:



Nikola Vucetic

University of East Sarajevo

17 PUBLICATIONS 29 CITATIONS

SEE PROFILE



Nebojsa Radic

University of East Sarajevo

14 PUBLICATIONS 163 CITATIONS

SEE PROFILE



Miroslav Milutinovic

University of East Sarajevo

18 PUBLICATIONS 94 CITATIONS

SEE PROFILE



Aleksandar Košarac

University of East Sarajevo

23 PUBLICATIONS 54 CITATIONS

SEE PROFILE



POREĐENJE REZULTATA SOPSTVENIH FREKVENCIJA KARBONSKIH NANOCIJEVI DOBIJENIH METODOM KONAČNIH ELEMENTA (MKE) I ANALITIČKOM METODOM

Nikola Vučetić¹, Nebojša Radić², Miroslav Milutinović³, Spasoje Trifković⁴,
Aleksandar Košarac⁵

Rezime: Kroz ovaj rad je izvršeno poređenje rezultata sopstvenih frekvencija karbonskih nanocijevi dobijenih korišćenjem MKE analize i analitičke metode. Svako tijelo ima sopstvenu frekvenciju kojom osciluje ukoliko nije izloženo dejstvu spoljašnjih sila. Cilj rada je da se utvrdi jednakopravnost MKE analize i analitičke metode u izračunavanju sopstvenih frekvencija karbonskih nanocijevi. Izračunate su sopstvene frekvencije karbonskih nanocijevi kružnog i kvadratnog poprečnog presjeka putem MKE analize i analitičke metode, te je izvršeno poređenje dobijenih rezultata prikazanih tabelarno i na dijagramima. Na osnovu dobijenih vrijednosti može se zaključiti da se odstupanja u rezultatima pri određivanju sopstvenih frekvencija nanocijevi putem MKE analize i analitičke metode nalaze u dozvoljenim granicama.

Ključne riječi: analitički metod, MatLab, MKE, nanocijevi, sopstvena frekvencija;

CARBON NANOTUBES NATURAL FREQUENCIES RESULTS COMPARISON USING FEM AND ANALYTICAL METHOD

Abstract: The paper presents carbon nanotubes natural frequencies results comparison using FEM and analytical method. Each body has its own frequency which oscillates if it is not exposed to the action of external forces. The aim of this paper is to establish the equality of FEM and analytical method in calculating carbon nanotubes natural frequencies. In our work we have calculated circular and square cross-section carbon nanotubes natural frequencies via FEM and analytical method and the comparisons of the results obtained in tables and graphs. Based on the obtained values it can be concluded that the discrepancies in the results for the calculation of nanotubes natural frequencies using FEM and analytical method were within permissible limits.

Key words: analytical method, MatLab, FEM, nanotubes, natural frequency;

¹ Asistent, Nikola Vučetić, I. Sarajevo, Mašinski fakultet I. Sarajevo, vuceticnikola@yahoo.com

² Prof. dr Nebojša Radić, I. Sarajevo, Mašinski fakultet I. Sarajevo, nesor67@yahoo.com

³ Doc. dr Miroslav Milutinović, I. Sarajevo, Mašinski fakultet I. Sarajevo, m.milutinovic82@gmail.com

⁴ Viši asistent, Spasoje Trifković, I. Sarajevo, Mašinski fakultet I. Sarajevo, trifkovic_s@yahoo.com

⁵ Viši asistent, Aleksandar Košarac, I. Sarajevo, Mašinski fakultet Istočno Sarajevo, akosarac@gmail.com

1. UVOD

Veoma specifična vrsta kretanja se dešava kada na tijelo djeluje sila proporcionalna otklonu tijela od ravnotežnog položaja. Ukoliko je ta sila uvijek usmjerena ka ravnotežnom položaju, uspostavlja se »naprijed-nazad« kretanje oko tog položaja. Takvo kretanje se naziva periodično kretanje, harmonijsko kretanje, oscilovanje ili vibriranje.

Kada su u pitanju molekuli tijela koje je u čvrstom agregatnom stanju, njihovo oscilovanje se izvodi oko čvora kristalne rešetke, dakle oko ravnotežnog položaja.

Metod konačnih elemenata (MKE) je danas najopštiji numerički metod primijenjen u gotovo svim naukama, a posebno u inženjerskim oblastima. Veliki broj međunarodnih časopisa najvišeg nivoa, čitava industrija za razvoj *software*-a na osnovama MKE, svakodnevna primjena MKE komercijalnih i specijalnih programskih paketa u okviru CAD sistema u svim industrijskim granama i intenzivna naučna istraživanja u MKE najkraće su ilustracije prethodne tvrdnje. Osnovna prednost MKE se ogleda u njoj uopštenost u primjeni (oblast solida, fluida, provođenja toplote, linearni i nelinearni problemi), kao i pogodnosti u pogledu primjene računara.

U našoj zemlji MKE se koristi u istraživačkom radu i u inženjerskoj praksi, počevši od sedamdesetih godina [1].

Jednačine konačnih elemenata se izvode pomoću diferencijalne i varijacijske formulacije. Drugim riječima, moguće je primijeniti *Galerkin*-ovu i *Rayleigh-Ritz*-ovu metodu [1].

Najjednostavniji konačni element je jednodimenzionalni element sa dva čvora i sa linearnom interpolacijom koji su korišćeni i u ovom radu.

Analiza vibracija nanogreda prikazana je u radu *Vibration analysis of Euler-Bernoulli nanobeams by using Finite Element Method* [2].

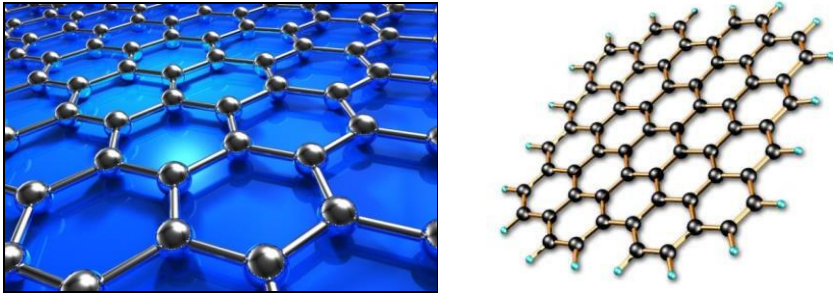
U novije vrijeme sve više pažnje se posvećuje nanotehnologiji i analizi fizičkih osobina karbonskih nanocijevi [3]. Jasno je da je ova tehnologija u samom začetku, no sva istraživanja ukazuju da je izuzetno važna i da će u skorije vrijeme zauzeti značajno mjesto u inženjerskim oblastima. Stoga je svakako veoma važno usmjeriti istraživačke napore u smjeru definisanja i što jasnijeg razumijevanja principa nanotehnologije.

Rezultati sopstvenih frekvencija karbonskih nanocijevi u ovom radu su dobijeni korišćenjem metode MKE i analitičke metode, te je izvršeno njihovo tabelarno poređenje, kao i poređenje putem dijagrama iz *software*-skog paketa MatLab.

2. KARBONSKE NANOCIJEVI

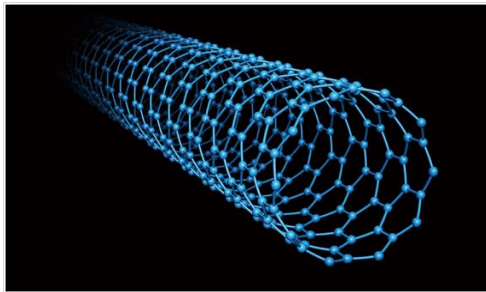
Karbonske nanocijevi su otkrivene 1991. godine. Od tada su provedena mnoga istraživanja s ciljem opisivanja njihovih osobina u svim granama nauke. Odlikuju se odličnim električnim, mehaničkim i toplotnim osobinama u poređenju sa konvencionalnim materijalima. Primjera radi, mehanička čvrstoća nanocijevi je znatno veća nego čvrstoća čelika [4].

Grafen, odnosno nanosloj ugljenikovih atoma pakovanih u dvodimenzionalnu (2D) rešetku u obliku saća, je osnovni gradivni blok karbonskih nanocijevi (slika 1).



Slika 1. Grafen, osnovni gradivni element karbonskih nanocijevi [4]

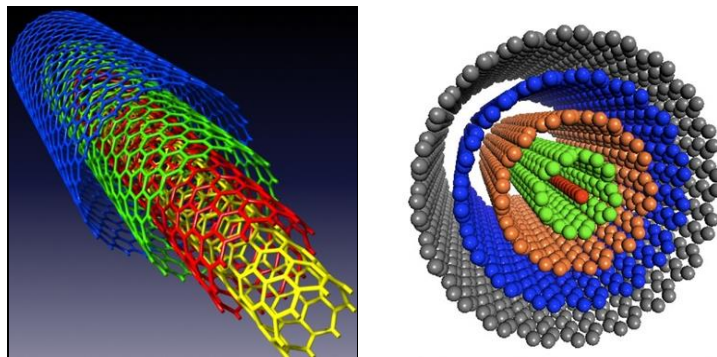
Jednoslojne karbonske nanocijevi (slika 2) (*single-walled carbon nanotubes-SWCNT*) se sastoje od jedne ploče grafena zamotane u oblik šupljeg cilindra.



Slika 2. Jednoslojna karbonska nanocijev (SWCNT) [4]

Atomi ugljenika se nalaze u vrhovima heksagona, a linije između vrhova predstavljaju veze između atoma ugljenika. Karbonske nanocijevi su obično prečnika oko 1 nm, a mogu biti duge čak i nekoliko mm.

Višeslojne karbonske nanocijevi (slika 3) (*multi-walled carbon nanotubes-MWCNT*) se sastoje od reda jednoslojnih karbonskih nanocijevi koncentrično ugnježenih, poput godova na drvetu. Mogu da imaju prečnik i do 100 nm. Rastojanje između slojeva višeslojnih karbonskih nanocijevi iznosi 0,34 nm [4].



Slika 3. Višeslojne karbonske nanocijevi (MWCNT) [4]

Karbonske nanocijevi mogu se produžavati raznim metodama, uključujući gasovite faze sinteze, metalno-organska hemijska taloženja ili hidrotermalnu analizu.

Osnovna primjena karbonskih nanocijevi je zasnovana kod nanouređaja [5], tranzistora [6], nanosenzora, dioda, led osvjetljenja i sl.

3. PRIMJENA MKE I ANALITIČKE METODE U ODREĐIVANJU SOPSTVENIH FREKVENCIJA KARBONSKIH NANOCIJEVI

3.1. Primjena MKE

Jednačine elastične ravnoteže konačnih elemenata postavljaju se uravnoteženjem elastičnih sila, odnosno pomijeranja u čvornim tačkama i sila i pomijeranja na spoljnim konturama [1]. Matrični oblik ovih jednačina je:

$$[K] \cdot \{\delta\} = [F], \quad (1)$$

gdje je:

$[K]$ matrica krutosti mreže konačnih elemenata, N/m

$\{\delta\}$ matrica pomijeranja čvornih tačaka konačnih elemenata, m

$[F]$ matrica sila u čvornim tačkama, N

Matrica krutosti je dijagonalna i dobija se sabiranjem matrica krutosti konačnih elemenata. Sumiranje se vrši po dijagonali matrice, i to po čvornim tačkama gdje se spajaju konačni elementi. Matrica krutosti ima opšti oblik:

$$[K] = \begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Matrica krutosti je kvadratna, dijagonalna i pojasna matrica. Dužina dijagonale zavisi od broja konačnih elemenata, a širina pojasa od broja čvorova konačnih elemenata.

Matrica pomijeranja $\{\delta\}$ je povezana sa matricom dilatacije:

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{\delta\}, \quad (3)$$

gdje je $[B]$ matrica koja zavisi od oblika mašinskog dijela

Konturni uslovi su spoljašnji uticaji i ograničenja za koja se proračun realizuje. U osloncima su pomijeranja jednaka nuli ili se mogu usvojiti da su nule.

Za razliku od statičke analize u kojoj su spoljašnji uticaji, a samim tim i sve ostale naponsko-deformacione veličine nezavisne od vremena, u dinamičkoj analizi spoljašnji uticaji su funkcije od vremena. Pored osnovnih parametara koji su neophodni za prikazivanje statičkog ponašanja nekog sistema, u dinamičkoj analizi vrijeme se pojavljuje kao novi, dodatni parametar koji znatno komplikuje analizu. Veoma je mali broj zadataka iz područja dinamičke analize za koje se mogu naći analitička rješenja. Zbog toga, numeričke metode pomoću kojih se dobijaju približna rješenja imaju veliki značaj u dinamici.

Kada se pri sračunavanju elemenata matrice masa primijene iste interpolacione funkcije kao i za aproksimaciju polja pomijeranja u elementu, tako dobijena matrica se naziva konzistentna matrica mase elementa. Ona je simetrična i

pozitivno definitna kvadratna matrica n -tog reda, gdje je n broj stepeni slobode elementa. Po svojoj strukturi, matrica m je ista kao i matrica krutosti K i sastoji se iz blokova:

$$m = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{1j} & m_{1k} \\ m_{i1} & m_{ij} & m_{ik} \\ m_{k1} & m_{kj} & m_{kk} \end{bmatrix} \quad (4)$$

gdje je k broj čvorova elementa, a dimenzije pojedinih blokova su jednake broju stepeni slobode u odgovarajućim čvorovima.

Određivanje sopstvenih frekvencija se svodi na određivanje rješenja homogenog sistema diferencijalnih jednačina kretanja. Pri određivanju rješenja treba razlikovati dva slučaja:

- sopstvene frekvencije bez prigušenja i
- sopstvene frekvencije sa prigušenjem.

Ovdje će se razmatrati slučaj sopstvenih frekvencija bez prigušenja.

Ovaj problem se definiše sljedećom diferencijalnom jednačinom:

$$M\ddot{q} + K\dot{q} = 0. \quad (5)$$

Ako se vektor generalisanih parametara pomijeranja u čvorovima sistema prikaže u obliku:

$$q = \bar{q} e^{i\omega t}, \quad (6)$$

gdje je $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$, (7)

Matrična jednačina sada postaje:

$$(K - \omega^2 M)\bar{q} = 0. \quad (8)$$

Sistem algebarskih jednačina ima rješenje, osim trivijalnog ($q=0$), samo ako je determinanta ovog sistema jednaka nuli, tj:

$$|K - \omega^2 M| = 0 \quad (9)$$

Pošto su K i M pozitivno definitne matrice, svi korjeni karakterističnog polinoma su realni pozitivni brojevi i predstavljaju sopstvene frekvencije [2].

3.2. Primjena analitičke metode

Za karbonsku nanocijev dužine L i prečnika d važi:

$$(1 - \mu\Delta^2)\tau_{kl} = \lambda\varepsilon_{kl}\delta_{kl} + 2G\varepsilon_{kl}, \quad (10)$$

gdje su:

τ_{kl} nelokalni tenzor napona, N/m^2

ε_{kl} tenzor deformacija, m

λ i G konstante.

$\mu = (e_0 \cdot a)^2$ nelokalni parametar (a karakteristika dužine, m, e_0 konstanta)

Nakon niza transformacija, dobijamo jednačinu za slobodna aksijalna pomijeranja nanocijevi:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f - \mu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (1 - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}) m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11)$$

Ova jednačina se svodi na jednačinu klasičnog štapa ukoliko je nelokalni parametar μ jednak nuli.

U cilju povećanja jačine kompozita, karbonske nanocijevi su uronjene u elastični medijum koji ima veliki uticaj na mehaničke osobine nanocijevi.

Shodno tome, aksijalna sila se predpostavlja kao $f = -ku$, gdje je k krutost elastičnog medijuma.

Nizom transformacija dolazimo do analitičkog oblika jednačine iz koje ćemo, određivanjem bezdimenzionalnog parametra frekvencije:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\left[\left[(2n-1)\pi/2 \right]^2 + \bar{K} \left(\mu/L^2 \left[(2n-1)\pi/2 \right]^2 + 1 \right) \right]}{\mu/L^2 \left[(2n-1)\pi/2 \right]^2 + 1}} \quad (12)$$

na osnovu relacije:

$$\Omega^2 = \frac{m\omega^2 L^2}{EA} \quad (13)$$

određivati sopstvene frekvencije karbonskih nanocijevi sa jednim, odnosno sa dva konačna elementa [7].

Matrica masa se može predstaviti kao [8]:

$$M_e = m \int_0^L N(x) N^T(x) dx + m(e_0 \cdot a)^2 \int_0^L \frac{dN(x)}{dx} \cdot \frac{dN^T(x)}{dx} dx = \frac{mL^2}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + mL^2 \left(\frac{e_0 \cdot a}{L} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \quad (14)$$

$$mL^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \left(\frac{e_0 \cdot a}{L} \right)^2 & \frac{1}{6} - \left(\frac{e_0 \cdot a}{L} \right)^2 \\ \frac{1}{6} - \left(\frac{e_0 \cdot a}{L} \right)^2 & \frac{1}{3} + \left(\frac{e_0 \cdot a}{L} \right)^2 \end{bmatrix}$$

Za karbonsku nanocijev sa jednim konačnim elementom slijedi analitički oblik jednačine za određivanje sopstvene frekvencije:

$$\omega^2 = \frac{K}{mL^2 \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{e_0 \cdot a}{L} \right)^2 \right]} = \frac{K}{T} \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{T}} \quad (15)$$

Za karbonsku nanocijev sa dva konačna elementa slijedi analitički oblik jednačine za određivanje sopstvene frekvencije:

$$\omega^4 - 3\omega^2 H + H^2 = 0. \quad (16)$$

Uz pomoć MatLab-a dolazimo do rješenja jednačine četvrtog stepena, od kojih uzimamo dva pozitivna, a odbacujemo negativne i konjugovano-kompleksne vrijednosti, pa dobijamo konačno:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 1,62\sqrt{H} \\ \omega_2 &= 0,92\sqrt{H} \end{aligned} \quad (17)$$

Za dalji proračun se usvaja vrijednost sopstvene frekvencije koja je bliža vrijednosti sopstvene frekvencije određene za jedan konačni element.

4. POREĐENJE DOBIJENIH REZULTATA SOPSTVENE FREKVENCIJE

4.1. Tabelarno poređenje rezultata

Uzimajući u obzir poznate vrijednosti pojedinih članova koji figurišu u jednačinama MKE i analitičkoj jednačini za određivanje sopstvene frekvencije za karbonske nanocijevi kružnog poprečnog presjeka sa jednim i sa dva konačna elementa, te variranjem vrijednosti pojedinih članova, dobijamo uporedne rezultate sopstvenih frekvencija (tabela 1).

Tabela 1. Uporedni rezultati sopstvenih frekvencija karbonskih nanocijevi kružnog poprečnog presjeka

$K \left[\frac{N}{m} \right] \cdot 10^4$	b [nm]	m [kg] · 10 ⁻²⁴	L [nm]	$e_o \cdot a$ [nm]	ω_1 [Hz] · 10 ¹²	ω_{a1} [Hz] · 10 ¹²	ω_2 [Hz] · 10 ¹²	ω_{a2} [Hz] · 10 ¹²
1	0,5	136,1	10	1	8,69	9,92	7,99	9,92
1	0,5	136,1	10	2	4,27	9,92	3,92	9,92
1	0,5	136,1	20	1	8,69	9,89	7,99	9,89
1	0,5	136,1	30	1	7,63	9,88	7,02	9,88
1	1	236,97	10	1	6,49	6,50	5,97	6,50
2	0,5	136,1	10	1	10,74	11,33	9,88	11,33

U tabeli 1 ω_1 i ω_2 predstavljaju sopstvene frekvencije karbonskih nanocijevi sa jednim, odnosno sa dva konačna elementa dobijene metodom MKE, dok ω_{a1} i ω_{a2} predstavljaju sopstvene frekvencije karbonskih nanocijevi sa jednim, odnosno sa dva konačna ekementa dobijene analitičkim putem.

Na isti način se dobijaju rezultati sopstvenih frekvencija za karbonske nanocijevi kvadratnog poprečnog presjeka sa jednim i sa dva konačna elementa (tabela 2).

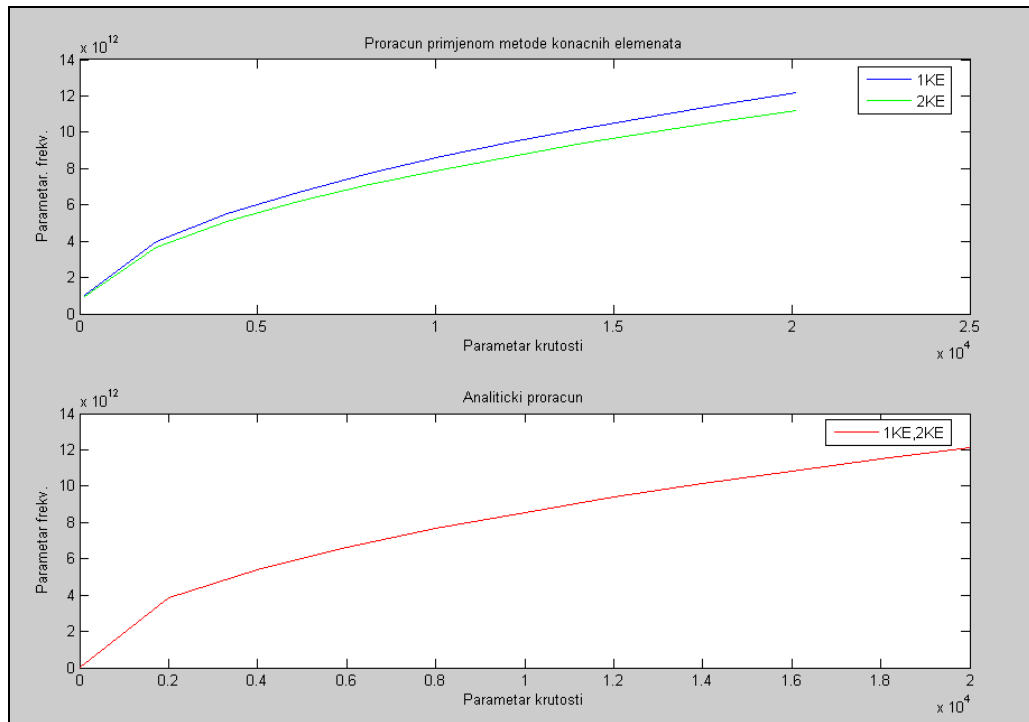
Tabela 2. Uporedni rezultati sopstvenih frekvencija karbonskih nanocijevi kvadratnog poprečnog presjeka

$K \left[\frac{N}{m} \right] \cdot 10^4$	b [nm]	m [kg] $\cdot 10^{-24}$	L [nm]	$e_o \cdot a$ [nm]	ω_1 [Hz] $\cdot 10^{12}$	ω_{a1} [Hz] $\cdot 10^{12}$	ω_2 [Hz] $\cdot 10^{12}$	ω_{a2} [Hz] $\cdot 10^{12}$
1	1	173,21	10	1	7,59	8,03	6,98	8,03
1	1	173,21	10	2	3,79	8,03	3,48	8,03
1	1	173,21	20	1	7,59	7,71	6,98	7,71
1	1	173,21	30	1	7,63	7,71	7,02	7,71
1	2	302,64	10	1	5,74	6,05	5,28	6,05
2	1	173,21	10	1	10,74	12,10	9,88	12,10

4.2. Poređenje rezultata dijagramima dobijenim u MatLab-u

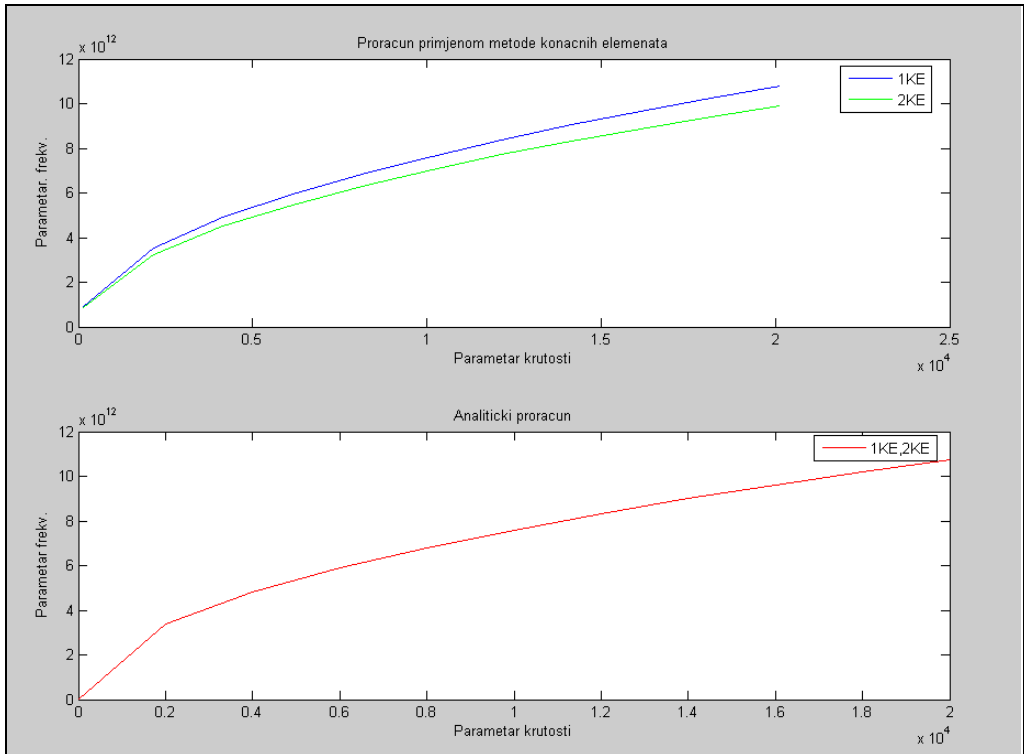
U ovom poglavlju izvršeno je upoređivanje rezultata sopstvenih frekvencija dobijenih metodom MKE i analitičkom metodom putem dijagrama izrađenih u MatLab-u u odnosu na vrijednosti poznatih parametara koji figurišu u navedenim obrascima, njihovo pojedinačno variranje, kao i u odnosu na oblik poprečnog presjeka karbonskih nanocijevi i broj konačnih elemenata.

Rezultati sopstvenih frekvencija za karbonske nanocijevi kružnog poprečnog presjeka sa jednim i sa dva konačna elementa prikazani su slikom 4.



Slika 4. Uporedni rezultati sopstvenih frekvencija karbonskih nanocijevi kružnog poprečnog presjeka

Rezultati sopstvenih frekvencija za karbonske nanocijevi kvadratnog poprečnog presjeka sa jednim i sa dva konačna elementa prikazani su slikom 5.



Slika 5. Uporedni rezultati sopstvenih frekvencija karbonskih nanocijevi kvadratnog poprečnog presjeka

5. ZAKLJUČAK

U radu su prikazani uporedni rezultati sopstvenih frekvencija karbonskih nanocijevi kružnog i kvadratnog poprečnog presjeka sa jednim i sa dva konačna elementa.

Do navedenih rezultata došlo se korišćenjem metode MKE i analitičke metode za određivanje sopstvenih frekvencija karbonskih nanocijevi.

Variranjem vrijednosti parametara u obrascima za određivanje frekvencije, te variranjem oblika poprečnog presjeka karbonske nanocijevi i broja konačnih elemenata dobijeni su rezultati frekvencija koji su prikazani tabelarno i dijagramima korišćenjem *software*-skog paketa MatLab.

Iz navedenih rezultata može se zaključiti da se nalaze u dozvoljenim odstupanjima, odnosno možemo potvrditi jednakopravnost u smislu tačnosti metode MKE i analitičke metode u izračunavanju sopstvenih frekvencija karbonskih nanocijevi.

U toku posljednjih dvadeset godina došlo je do znatnih promjena u načinu proračuna inženjerskih konstrukcija. Tradicionalne metode proračuna koje su prilagođene uglavnom klasičnim računskim sredstvima, a ujedno i limitirane njihovim skromnim mogućnostima, ustupaju mjesto savremenim metodama numeričke analize koje se zasnivaju na primjeni elektronskih računara.

LITERATURA

- [1] Sekulović, M. (1988). Metod konačnih elemenata, Građevinska knjiga, Beograd.
- [2] Eltaher, M.A., Alshorbagy, A.E., Mahmoud, F.F. (2013). *Vibration analysis of Euler-Bernoulli nanobeams by using Finite Element Method*. Applied Mathematical Modelling, p. 4787-4797.
- [3] Saito, R., Dresselhaus, G., Dresselhaus, M.S. (2003). *Physical Properties of Carbon Nanotubes*. Imperial College Press. London, U.K.
- [4] Cvetičanin, M.J. (2013). Funkcionalizovani materijali na bazi ugljeničnih nanocevi, Doktorska disertacija, Fakultet za fizičku hemiju, Beograd.
- [5] Dragoman, M., Hartmagel, H.L., Tuovinen, J., Plana, R. (2005). *Microwave applications of carbon nanotubes*. Frequenz., vol. 59, no.11-12, p. 251-263.
- [6] Yu, S. Z., Li Yen, S.F., Tang, W.C., Burke, P.J. (2004). *Carbon nanotube transistor operation at 2.6 GHz*. Nano Lett., vol. 4, p. 753–756.
- [7] Aydogdu, M. (2012). *Axial vibration analysis of nanorods (carbon nanotubes) embedded in an elastic medium using nonlocaly elasticity*. Mechanics Research Communications, p. 34-40.
- [8] Adhikari, S., Murmu, T., McCarthy, M.A. (2013). *Dynamic finite element analysis od axially vibrating nonlocal rods*. Finite Elements in Analysis and Design, p. 42-50.