

Jedan pogodan model za određivanje korelacije između stvarnog i srednjeg specifičnog toplotnog kapaciteta i mogućnosti njegove primene

Branko B. Pejović, Ljubica C. Vasiljević, Vladan M. Mičić, Mitar D. Perušić

Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Tehnološki fakultet Zvornik, Republika Srpska

Izvod

Polazeći od definicije srednjeg specifičnog toplotnog kapaciteta za određeni, pogodno izabran temperaturski interval, primenom diferencijalnog i integralnog računa, u radu je izvedena analitička zavisnost stvarnog od srednjeg specifičnog toplotnog kapaciteta. Dobijena relacija u diferencijalnom obliku, za definisani temperaturski interval, omogućuje direktno rešavanje problema, bez posebnih ograničenja za njenu primenu. Koristeći dobijenu zavisnost, izveden je opšti model u obliku polinoma proizvoljnog stepena u zavisnosti od temperature, koji je pogodniji i brži za praktičnu primenu od postojećeg modela, koji nema opšti karakter. Na bazi izvedene zavisnosti, primenom diferencijalne geometrije, data je nova metoda za grafičko rešavanje postavljenog problema, što takođe može imati praktični značaj s obzirom na to da se mnogi problemi u termodinamičkoj praksi rešavaju paralelno, analitički i grafički. Dobijeno rešenje iskorišćeno je za određivanje razmenjene specifične količine toplote, preko izvedenog analitičkog modela. Predloženo grafičko rešenje iskorišćeno je za konstrukciju dijagrama razmenjena specifična količina toplote–temperatura, na kome je dat postupak za određivanje stvarnog i srednjeg specifičnog toplotnog kapaciteta. Dokaz svih grafičkih konstrukcija izveden je korišćenjem diferencijalnih osobina između pojedinih termodinamičkih veličina. Verifikacija prikazanog modela kao i mogućnosti njegove primene data je na nekoliko karakterističnih primera poluidealnog i realnog gasa. Pri ovome, pored linearnih i nelinearnih funkcija u obliku polinoma, analizirana je i eksponencijalna funkcija zavisnosti specifičnih toplotnih kapaciteta od temperature.

Ključne reči: stvarni i srednji specifični toplotni kapacitet, poluidealan gas, realan gas, razmenjena specifična toplota, diferencijalna geometrija, analitičke korelacije, grafičke konstrukcije.

Dostupno na Internetu sa adrese časopisa: <http://www.ache.org.rs/HI/>

Osim translacionog i rotacionog kretanja, atomi u molekulima gasa za slučaj poluidealnog gasa imaju i mogućnost oscilovanja u toku kretanja. Za ovo kretanje potrebna je energija koja je funkcija samo temperature [1–3]. U termodinamičkom smislu po definiciji, kod poluidealnog gasa specifični toplotni kapacitet je funkcija temperature, tj. $c = c(T)$ [4–6].

Količina toplote koja se dovodi nekom poluidealnom gasu, i uopšte nekom telu čiji specifični toplotni kapacitet zavisi od temperature, od početne, t_1 , do krajnje dostignute temperature, t_2 , je:

$$Q_{12} = m \int_{t_1}^{t_2} c \, dt \quad (1)$$

gde veličina $\int_{t_1}^{t_2} c \, dt$ predstavlja srednji specifični toplotni kapacitet u intervalu temperatura t_1 – t_2 [7–10].

Da bi se razmenjena količina toplote za slučaj poluidealnog gasa mogla odrediti, u opštem slučaju zahteva se poznavanje analitičke zavisnosti srednjeg toplotnog kapaciteta u datom intervalu temperatura. Očigledno je

da ova vrednost ne zavisi samo od veličine temperaturskog intervala tj. razlike $t_2 - t_1 = T_2 - T_1$, već i od položaja tog intervala na temperaturskoj skali, [5,8,11–13].

Da li će se neki gas tretirati idealnim ili poluidealnim zavisi od željene tačnosti. Značajne temperaturske razlike zahtevaju tretman gasa poluidealnim.

Napomenimo ovde, da je kod grafičkog predstavljanja specifičnih toplotnih kapaciteta kao i analitičkih proračuna, praktičnije odnosno pogodnije koristiti Celzijusovu, t , nego skalu apsolutne temperature, T . Podeljci ovih skala su jednaki dok se iste razlikuju samo u položaju koordinatnog početka.

Zavisnost stvarnog odnosno pravog specifičnog toplotnog kapaciteta od temperature kod poluidealnog gasa data je na slici 1. Na istoj slici predstavljen je i srednji specifični toplotni kapacitet za interval temperatura 0 do t_1 , odnosno 0 do t_2 . Na slici 1 se vidi da se razmenjena specifična količina toplote za interval temperatura t_2 – t_1 može odrediti na dva načina, i to preko srednjeg i stvarnog specifičnog toplotnog kapaciteta:

$$q_{12} = \int_0^{t_2} c \, dt - \int_0^{t_1} c \, dt \quad (2)$$

Prepiska: V. Mičić, B. Pejović, Tehnološki fakultet Zvornik, 75400 Karakaj bb, Republika Srpska, Bosna i Hercegovina.

E-pošta: micicvladan@yahoo.com; b.pejovic@verat.net

Rad primljen: 4. novembar, 2011

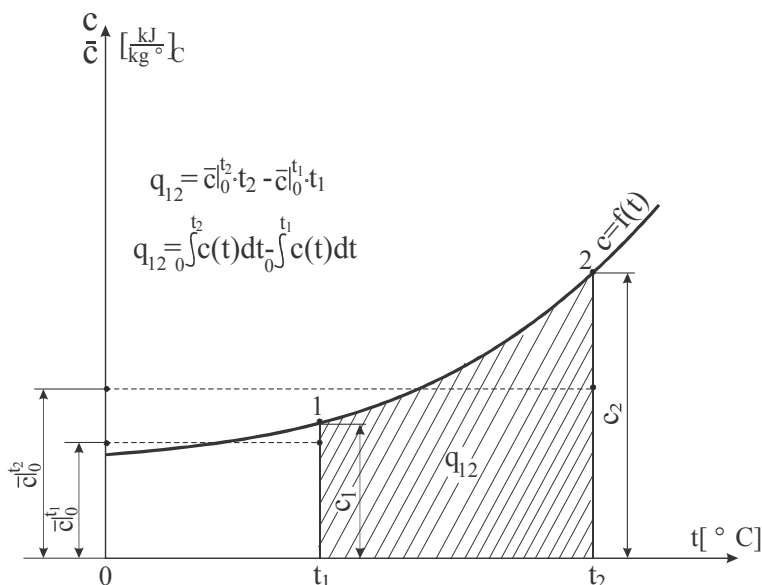
Rad prihvaćen: 19. avgust, 2012

STRUČNI RAD

UDK 536.63:5/6

Hem. Ind. 67 (3) 495–511 (2013)

doi: 10.2298/HEMIND111104092P



Slika 1. Određivanje specifične količine toplote u zavisnosti od stvarnog i srednjeg specifičnog toplotnog kapaciteta za proizvoljni interval temperatura.

Figure 1. Calculation of specific heat as a function of real and mean specific heat capacity for arbitrary temperature interval.

Pri ovome, zavisno da li su pritisak ili zapremina konstantni, uzimaju se vrednosti c_p i c_v , odnosno c_p i c_v .

Razmenjena količina toplote, može se izraziti i na drugi način [7,14–17]:

$$q_{12} = \bar{c}_{t_1}^{t_2} (t_2 - t_1) = \int_1^2 c(t) dt \quad (3)$$

Ovde je srednji specifični toplotni kapacitet za interval $t_2 - t_1$:

$$\bar{c}_{t_1}^{t_2} = \frac{\bar{c}_0^{t_2} t_2 - \bar{c}_0^{t_1} t_1}{t_2 - t_1} \quad [\text{J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})] \quad (4)$$

Na sličan način se određuje i promena unutrašnje energije, odnosno promena entalpije poluidealnog gasa:

$$u_2 - u_1 = \bar{c}_v \Big|_0^{t_2} t_2 - \bar{c}_v \Big|_0^{t_1} t_1, \quad h_2 - h_1 = \bar{c}_p \Big|_0^{t_2} t_2 - \bar{c}_p \Big|_0^{t_1} t_1 \quad (5)$$

Iz prethodnog, s obzirom na to da se razmenjena količina toplote kao i ostale termodinamičke veličine uvek mogu odrediti preko intervala temperatura 0 do t , sledi da je specifične toplotne kapacitete najpogodnije grafički predstavljati i analitički određivati, baš za taj interval temperature. Ovo se zaključuje i sa dijagrama na slici 1.

Kod određivanja promene entropije poluidealnog gasa prema opštoj relaciji, za proizvoljnu promenu [1,8,18–20]:

$$\Delta s = \int_1^2 c_p \frac{dT}{T} - R \int_1^2 \frac{dp}{p} \quad (6)$$

proračun se ne može izvoditi preko srednjeg, već se mora koristiti stvarni toplotni kapacitet, koji, kao što je rečeno, zavisi od temperature tj. $c_p = c_p(T)$.

Isto važi i za određivanje promene entropije za slučaj izobarske i izohorske promene kada je u pitanju poluidealan gas:

$$\Delta s_p = \int_1^2 c_p \frac{dT}{T}, \quad \Delta s_v = \int_1^2 c_v \frac{dT}{T} \quad (7)$$

Kod određivanja promene entropije realnog gasa u mnogim slučajevima neophodno je poznavanje funkcije $c_p = c_p(T)$ [7,9,16].

Prema tome za slučaj proračuna termodinamičkih veličina gde se pojavljuje integral $\int c dT$, pogodno je matematičke operacije izvoditi sa srednjim specifičnim toplotnim kapacitetom, dok se stvarni specifični toplotni kapacitet mora koristiti za slučajeve kada se javlja integral oblika $\int c dT / T$.

Poznavanje stvarnog toplotnog kapaciteta neophodno je i kod iznalaženja diferencijalnih termodinamičkih relacija gde se uspostavljaju veze između veličina stanja i specifičnih toplotnih kapaciteta, kao reprezentima spoljnih uticaja. Pri ovome, ne može se koristiti srednji, već samo stvarni toplotni kapacitet, s obzirom na to da se isti definiše preko diferencijalnog količnika:

$$c = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dT}$$

Ako se neki gas zagreva pri nekoj manjoj temperaturskoj razlici, $dt = dT$, vrednost specifičnog toplotnog kapaciteta neće se promeniti pa se u tom slučaju može računati sa stvarnim toplotnim kapacitetom. Greška u

računu će tada biti minimalna i može se zanemariti. Za velike temperaturske promene, mora se računati za srednjim specifičnim toplotnim kapacitetom za to temperatursko područje.

KARAKTERISTIČNI MODELI ZA ODREĐIVANJE SPECIFIČNOG TOPLOTNOG KAPACITETA

Specifični toplotni kapacitet poluidealnog gasa prema eksperimentalnim istraživanjima i prema teoriji kvanta, u opštem slučaju može se napisati u obliku polinoma, [18,21–25]:

$$c = a + bt + dt^2 + et^3 + \dots + ft^n \quad (8)$$

gde se $c = c_0 = a$, odnosi za temperaturu $t = 0$ °C. Koeficijenti u jednačini (8) mogu se naći u odgovarajućoj literaturi [6,26,27].

U teoriji specifičnih toplotnih kapaciteta posebno mesto zauzima teorija Einsteina. Srednji molarni specifični toplotni kapacitet dvoatomnih gasova prema ovoj teoriji, dat je jednačinom oblika [18,19,27]:

$$\bar{c} = \bar{c}_0^t = \bar{c}' + \bar{c}'' \quad \text{[J/(mol K)]} \quad (9)$$

gde je:

$\bar{c}' = 5/2MR$ – specifični toplotni kapacitet od translacije i rotacije molekula, koji ne zavisi od temperature. Ovde je M molarna masa, dok je R univerzalna gasna konstanta.

$\bar{c}'' = MRx(e^x - 1)$ – specifični toplotni kapacitet od oscilacija molekula, koji zavisi od temperature.

Zamenom \bar{c}' i \bar{c}'' u (9) dobija se konačna jednačina u obliku:

$$\bar{c} = \frac{5}{2}MR + MR \frac{x}{e^x - 1} \quad (10)$$

Ovde je $x = \theta/T$, dok je θ karakteristična temperatura koja je konstantna za svaki gas, a dobija se iz spektroskopskih podataka; T predstavlja apsolutnu temperaturu.

Specifični toplotni kapacitet realnih gasova u opštem slučaju zavisi kako od temperature, tako i od pritiska gasa. Za određivanje specifičnog toplotnog kapaciteta, ovde se najčešće primenjuje model u obliku analitičke zavisnosti [6,8,11,28]:

$$c = c_t + \Delta c \quad (11)$$

gde prvi član, c_t , predstavlja specifični toplotni kapacitet gasa u vrlo razređenom ili idealnom stanju i on je funkcija samo temperature. Drugi, odnosno dodatni član, Δc , uzima u obzir zavisnost specifičnog toplotnog kapaciteta od pritiska. Specifični toplotni kapacitet u jednofaznoj oblasti realnih gasova predstavlja funkciju temperature i raste sa njenim povećanjem.

Za izračunavanje specifičnog toplotnog kapaciteta realnih gasova, za relativno uže područje temperature, najčešće se koristi linearni model, dok se za šire područje može koristiti analitički model u obliku polinoma trećeg i četvrtog stepena. Ovi modeli se najčešće daju pri standardnim pritiscima i dobijaju se eksperimentalno [1,3,4].

Za jako pregrejanu paru realnih gasova, bez neke veće greške može se smatrati da je zavisnost specifičnog toplotnog kapaciteta od temperature linearna. Zavisnost specifičnog toplotnog kapaciteta tečnosti od temperature manje je izražena nego kod gasova. Pri ovome sa dovoljnom tačnošću za širi interval temperatura može se za izračunavanje primeniti model u obliku linearne odnosno kvadratne funkcije, [2,22,28], na primer model prema Dietericiu [29,30].

Srednji specifični toplotni kapacitet poluidealnih i realnih gasova, u praksi se najčešće određuje preko odgovarajućih tablica i dijagrama za određeni gas i temperaturski interval $0-t$. Isto tako postoje i relacije u obliku linearne zavisnosti, koje najčešće važe za određeni relativno uži temperaturski interval. Pri ovome, rezultati se dobijaju eksperimentalno. Isto tako, postupa se i kod određivanja stvarnog specifičnog toplotnog kapaciteta, [2,3,10,12,14,32].

U praksi, zbog jednostavnijeg postupka, češće se eksperimentalno određuje srednji nego stvarni toplotni kapacitet, pa o njemu postoji mnogo više kako tabelarnih i dijagramskih tako i analitičkih podataka [5,8,13,16,33,34].

U nastavku, biće pokazano da je, kako za slučaj poluidealnih tako i realnih gasova, moguće odrediti stvarni ako je poznat srednji specifični toplotni kapacitet, za određeno definisano temperatursko područje.

POSTAVKA PROBLEMA

Srednji specifični toplotni kapacitet za interval temperatura od 0 do t u praksi se najčešće određuje eksperimentalno u obliku funkcije $\bar{c} = f(t)$. Tehnički proračuni i analize zahtevaju i poznavanje stvarnog specifičnog toplotnog kapaciteta takođe u obliku funkcije $c = f(t)$ [1,4,5,8,10,15].

Ovaj problem u teoriji i praksi, da bi se izbegli eksperimenti, ponekad se rešava indirektno, tako što se prema definiciji srednjeg specifičnog toplotnog kapaciteta za interval temperatura 0 do t , $\bar{c} = q/t$ odredi razvijena količina toplote za isti interval temperatura kao $q = \bar{c}t$, u opštem slučaju.

Nakon toga, s obzirom na to da je $\bar{c} = \bar{c}(t)$ i $q = q(t)$, diferenciranjem dobijenog izraza po temperaturi, tj. $c = dq/dt$, dobija se tražena zavisnost $c = f(t)$, [2,7,28,31]. Očigledno ovaj postupak nije najpodesniji za praktičnu primenu. U nastavku biće dat predlog kako za analitičko tako i za grafičko rešenje problema.

ANALITIČKO REŠENJE PROBLEMA

Pretpostaviće se da je za određeni interval temperatura 0 do t funkcija $c = f(t)$ unapred poznata, na primer određena eksperimentalno, što je najčešći slučaj. Na bazi toga, određiće se direktno zavisnost $c = f(t)$ bez određivanja razmenjene specifične količine toplote, odnosno bez izvođenja eksperimenta.

Prema slici 2, gde je prikazana zavisnost stvarnog specifičnog toplotnog kapaciteta od temperature $c = f(t)$, posmatra se šire temperatursko područje za interval temperatura 0 do t . Pri ovome početna temperatura je $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, dok je neka krajnja proizvoljna temperatura t . Za ovo područje srednji specifični toplotni kapacitet je nepromenjen i označen je sa $\bar{c} = c|_0^t$, dok je stvarni specifični toplotni kapacitet c promenljiv i zavisi od temperature, tako da na primer u proizvoljnoj tački 1 ima vrednost c_1 koja se odnosi za temperaturu t_1 . Ovakve oznake uvedene su prvenstveno iz praktičnih razloga, radi jednostavnijeg izvođenja relacija koje slede.

Srednji specifični toplotni kapacitet za interval temperatura 0 do t , po definiciji je:

$$\bar{c} = \frac{\int_0^t c dt}{t} = \frac{\int_0^t f(t) dt}{t} = \bar{c}|_0^t \quad (12)$$

gde je funkcija $f(t) = c(t)$. Odavde sledi da je:

$$\bar{c}t = \int_0^t c dt \quad (13)$$

što predstavlja jednakost površina na slici 2.

Ako diferenciramo obe strane jednačine (13) biće:

$$d(\bar{c}t) = d\left(\int_0^t c dt\right) \quad (14)$$

Prema pravilima izvoda proizvoda funkcija i izvoda određenog integrala funkcije, sledi da je:

$$\bar{c}dt + t d\bar{c} = c dt \quad (15)$$

Odavde sledi da je:

$$c = \frac{\bar{c}dt + t d\bar{c}}{dt} \quad (16)$$

odnosno tražena zavisnost stvarnog od srednjeg specifičnog toplotnog kapaciteta u funkciji temperature t :

$$c = \bar{c} + t \frac{d\bar{c}}{dt}$$

Za slučaj da je zavisnost $\bar{c} = \bar{f}(t)$ linearna, što je čest slučaj u praksi, biće:

$$\bar{c} = \alpha + \beta t \quad (18)$$

Odavde je:

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = \beta$$

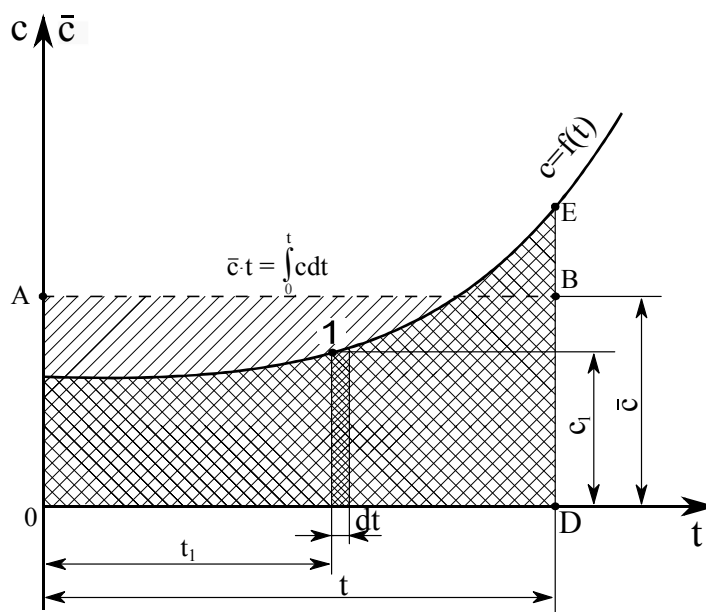
Odnosno, prema relaciji (17), nakon zamene u (18):

$$c = \alpha + 2\beta t \quad (19)$$

Ako je funkcija $\bar{c} = \bar{f}(t)$ kvadratna biće:

$$\bar{c} = \alpha + \beta t + \chi t^2 \quad (20)$$

Odavde je:



Slika 2. Zavisnost stvarnog specifičnog toplotnog kapaciteta od temperature za interval temperatura 0 do t .
Figure 2. Real specific heat capacity as a function of temperature for interval 0 to t .

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = \beta + 2\chi t$$

Odnosno, prema relaciji (17):

$$c = \alpha + 2\beta t + 3\chi t^2 \tag{21}$$

Ako opštu zavisnost $\bar{c} = \bar{f}(t)$ napišemo u obliku:

$$\bar{c} = \alpha + \beta t + \chi t^2 + \delta t^3 + \epsilon t^4 + \dots + \phi t^n \tag{22}$$

prema prethodnom biće:

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = \beta + 2\chi t + 3\delta t^2 + 4\epsilon t^3 + \dots + n\phi t^{n-1} \tag{23}$$

Koristeći izvedene relacije (18) i (21) za linearnu i kvadratnu zavisnost, zapazha se da se opšta zakonitost može dati u obliku:

$$c = \alpha + 2\beta t + 3\chi t^2 + 4\delta t^3 + 5\epsilon t^4 + \dots + (n+1)\phi t^n \tag{24}$$

Ista zakonitost dobija se i zamenom relacija (22) i (23) u (17).

Kod termodinamičkih proračuna u praksi obično je $n \leq 4$.

Očigledno, u relaciji (22) je $\bar{c} \equiv \bar{c} \Big|_0^t$, dok se c odnosi na neku proizvoljnu temperaturu t . S obzirom na izvedenu relaciju (17), sledi da uvek postoji razlika $c - \bar{c}$, pa se na osnovu toga može dati principijelna zavisnost $c = f(t)$, slika 3.

Prema izvedenom modelu, razmenjena količina toplote u opštem slučaju za interval temperatura od 0 do t biće: $q = \int_0^t c(t) dt$, odnosno prema (24):

$$q = \int_0^t [\alpha + 2\beta t + 3\chi t^2 + \dots + (n+1)\phi t^n] dt \tag{25}$$

Odavde se nakon integriranja dobija konačno:

$$q = \alpha t + \beta t^2 + \chi t^3 + \dots + \phi t^{n+1} \text{ [J/kg]} \tag{26}$$

Izvedene relacije (24) i (26) važe za proizvoljan polinom n -tog stepena funkcije $c = f(t)$, i omogućuju direktnu primenu, s obzirom na to da su konstante $\alpha, \beta, \chi, \dots, \phi$ poznate prema (22).

Za proizvoljan interval temperatura $t_1 - t_2$ nema prepreke za primenu izvedenih relacija pri određivanju veličina q_{12} , odnosno $\bar{c} \Big|_{t_1}^{t_2}$. Pri ovome koriste se relacije (2) i (4). Slično se postupa i kod određivanja promene unutrašnje energije i entalpije za slučaj poluidealnog gasa.

Razmenjena specifična količina toplote, za proizvoljan temperaturni interval $0 - t$, kao što je rečeno može se odrediti preko dve relacije:

$$q = \bar{c}t, \quad q = \int_0^t c dt$$

Ovde je, kao što je rečeno, $\bar{c} \equiv \bar{c} \Big|_0^t$, dok je $c \equiv c(t)$. Iz izvedene relacije (17), sledi da je:

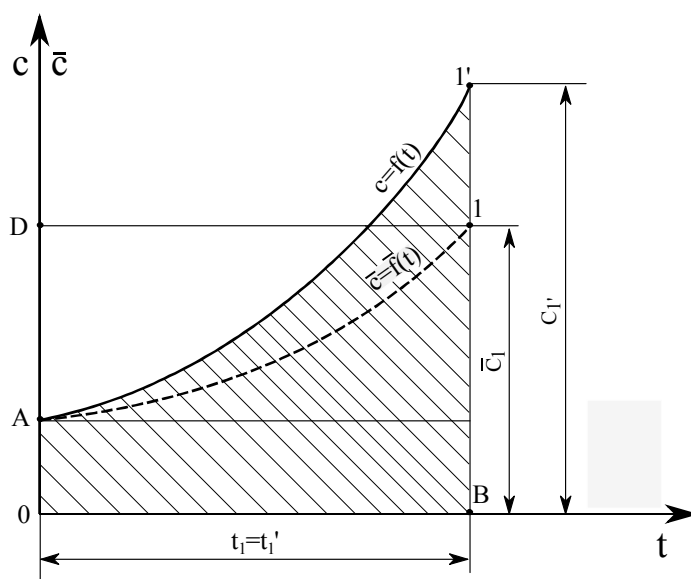
$$\bar{c} = c - t \frac{dc}{dt}$$

Sada razmenjenu količinu toplote, takođe za proizvoljan interval temperatura od 0 do t , možemo odrediti na još jedan način, u složenijem obliku:

$$q = \bar{c}t = (c - t \frac{dc}{dt})t$$

odnosno:

$$q = tc - t^2 \frac{dc}{dt} \text{ [J/kg]} \tag{27}$$



Slika 3. Grafički prikaz principijelnih zavisnosti $\bar{c} = \bar{f}(t)$ i $c = f(t)$.
Figure 3. Plots of $\bar{c} = \bar{f}(t)$ and $c = f(t)$.

Dobijena relacija je funkcija temperature i može poslužiti za razne termodinamičke analize, s obzirom na to da je specifična količina toplote izražena preko c i izvoda od c po temperaturi.

GRAFIČKO REŠENJE PROBLEMA

Ako prema slici 4, u proizvoljnoj tački 1 poznate funkcije $c = f(t)$, nacrtane u određenoj razmeri, konstruišemo tangentu, ona će ordinatnu osu da seče u tački A. Tačka B se dobija na preseku vertikale iz tačke 1 i horizontale iz tačke A. Nanošenjem duži $B1' = \Delta_1$ na vertikalu iz tačke 1, tako da je $\Delta_1 = \Delta_2$, dobijamo tačku 1' funkcije $c = f(t)$.

Dokaz konstrukcije

Iz trougla A1B sledi da je ugao tangente sa horizontalom:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\Delta_1}{t_1} = \frac{\Delta_1}{t_1} \quad (28)$$

Isto tako, za proizvoljnu tačku krive $\bar{c} = \bar{f}(t)$, s obzirom na definiciju izvoda, biće:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dc}{dt} \quad (29)$$

Prema izvedenoj relaciji (17), razlika koja ovde uvek postoji je:

$$\Delta = c - \bar{c} = t \frac{dc}{dt} \quad (30)$$

Uzimajući u obzir (29) biće:

$$c = \bar{c} + t \operatorname{tg} \beta \quad (31)$$

Oдавде sledi da se ordinata proizvoljne tačke 1' na krivoj $c = f(t)$ dobija kao:

$$c_{1'} = \bar{c}_1 + t_1 \operatorname{tg} \beta_1 \quad (32)$$

S obzirom na to da je prema (28), $\Delta_1 = t_1 \operatorname{tg} \beta_1$, odnosno za proizvoljnu tačku krive $c = f(t)$:

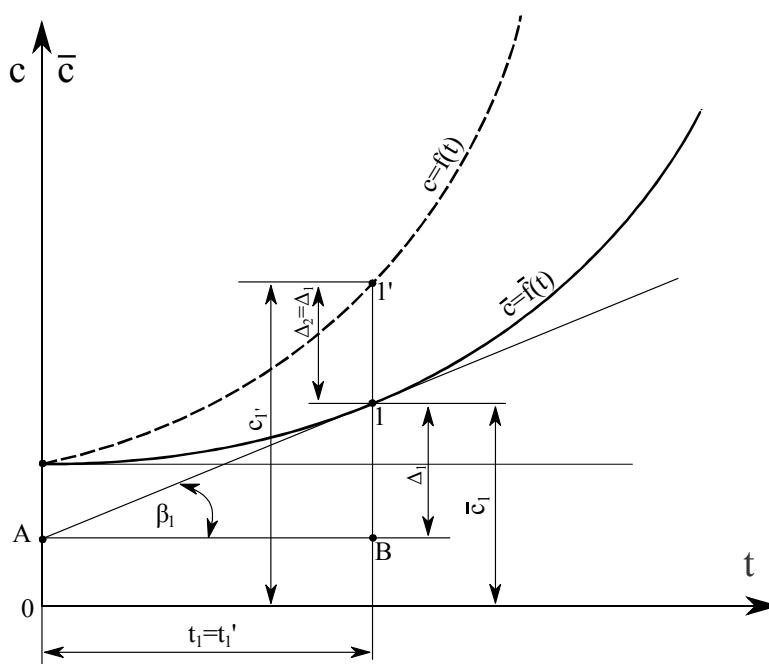
$$\Delta_1 = t_1 \operatorname{tg} \beta_1$$

Visinska razlika Δ_1 određuje se ovde grafički za svaku tangentu.

Prema tome, u nekoliko proizvoljnih tačaka poznate krive $\bar{c} = \bar{f}(t)$ konstruišu se tangente, a zatim se iz dotirnih tačaka po vertikali nanese visinske razlike Δ_1 . Spajanjem tako određenih tačaka, dobija se u granicama grafičke tačnosti, kriva $c = f(t)$.

Oдавде za linearnu zavisnost $c = f(t)$, koja se često javlja u praksi, sledi jednostavna konstrukcija prave $c = f(t)$. Dovoljno je u proizvoljnoj tački 1 polazne prave naneti visinsku razliku $\Delta_2 = \Delta_1$ i dobijenu tačku spojiti sa tačkom gde prava $\bar{c} = \bar{f}(t)$ seče ordinatnu osu.

Polazni dijagram $c = f(t)$ i iz njega dobijeni dijagram $c = f(t)$, kako za linearnu tako i za nelinearnu zavisnost, na bazi relacije (2), mogu se iskoristiti za planimetrijsko određivanje razmenjene količine toplote za proizvoljni interval temperatura $t_1 - t_2$. Ova količina toplote dobija se jednostavno kao razlika odgovarajućih površina na dijagramima.



Slika 4. Grafička konstrukcija krive $c = f(t)$ na bazi krive $\bar{c} = \bar{f}(t)$.

Figure 4. Graphical construction of the curve $c = f(t)$ using the curve $\bar{c} = \bar{f}(t)$.

Grafička konstrukcija dijagrama (q,t)

Na bazi poznatog dijagrama (c,t) dobijenog grafički prema postupku razrađenom u prethodnom poglavlju, može se grafički konstruisati dijagram razmenjena specifična količina toplote–temperatura, (q,t).

U opštem slučaju može se napisati da je:

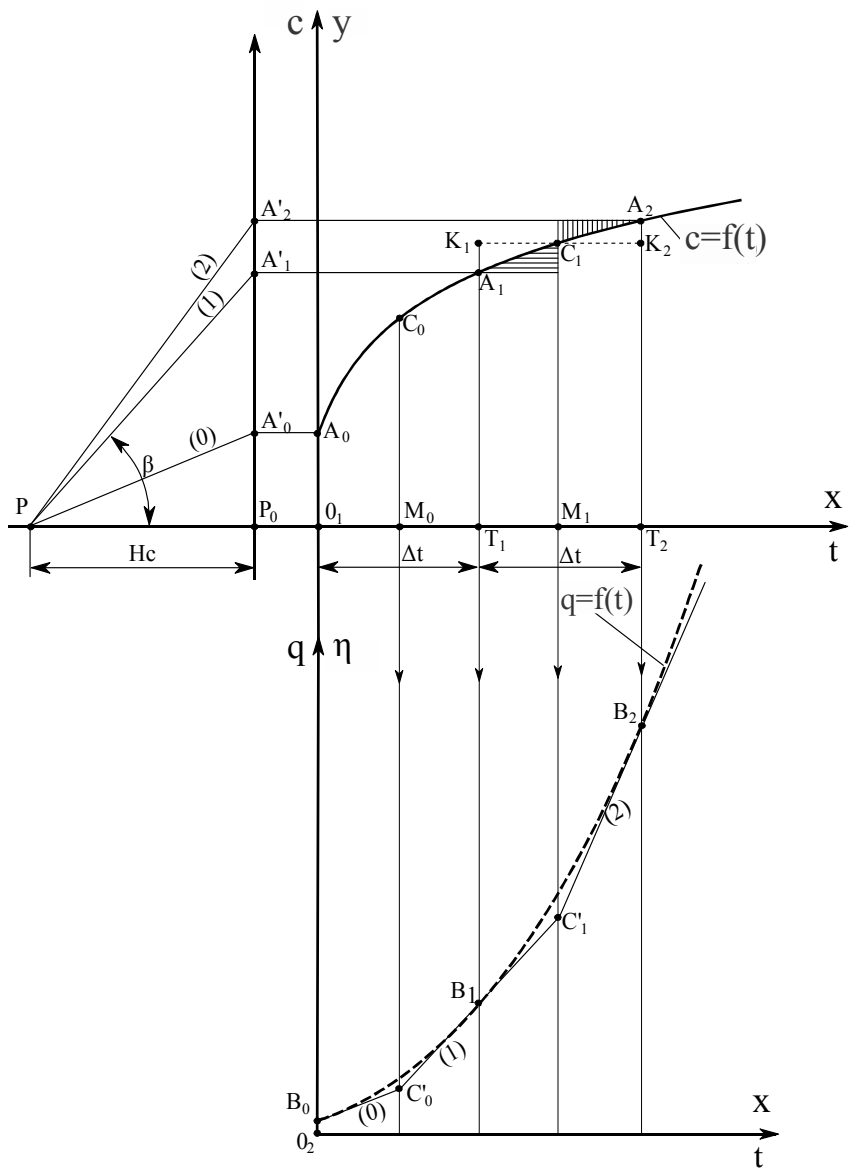
$$q = \int c dt + C_1 \tag{33}$$

Pri ovome je integraciona konstanta $C_1 = q_0$. Kriva (q,t) jeste integralna kriva od funkcije (c,t) pa se mora znati partikularni integral tj. početna tačka krive. Kroz ovu tačku prolazi samo jedna integralna kriva, koja predstavlja traženi zakon $q = f(t)$ za dato početno stanje. Metoda koja sledi bazirana je na postupku grafičkog integriranja razrađenom u matematičkoj literaturi

[34,35], s tim da će biti prilagođena rešavanju postavljenog problema i izračunavanju odgovarajućih koeficijenata razmere.

Neka je dijagram (c,t) nacrtan u razmeri $u_c [J/(kg \text{ } ^\circ C \text{ mm})]$ za stvarni specifični toplotni kapacitet i $u_t [^\circ C/mm]$ razmeri za temperaturu prema slici 5. Podelimo temperaturski razmak na izvestan broj jednakih podeljaka Δt tj. $O_1 T_1 = T_1 T_2 = \Delta t$. U svakom podeljku nađimo srednju apscisu M_i , takvu da ordinata povučena u toj tački seče dijagram (c,t) u tačkama C_i . Pri ovome išrafirane površine na dijagramu biće približno jednake.

Sada u proizvoljnoj tački P_0 povučemo vertikalnu osu paralelnu ordinatnoj osi i na njoj projektujemo poznate tačke krive $c = f(t)$: A_0' , A_1' i A_2' . Izaberemo proizvoljan pol P na rastojanju Hc i spojimo ga zracima sa tačkama A_i' (zruci (0), (1), (2),...).



Slika 5. Grafička konstrukcija dijagrama (q,t) pomoću dijagrama (c,t).
Figure 5. Graphical construction of the (q,t) diagram using the (c,t) diagram.

Izaberemo sada novi sistem (O_2, q, t) , tako da je osa O_2q kolinearna sa osom $O_2\eta$. Na osi $O_2\eta$ izaberemo tačku B_0 koja odgovara početnoj specifičnoj količini toplote q_0 , i iz nje povučemo paralelu zraku (O) do preseka sa vertikalom iz tačke C_0 , pri čemu dobijamo tačku C_0' . Na isti način iz tačke C_0' povlačimo zrak (1), do preseka sa vertikalom iz C_1 .

Duži B_0 , C_0' i C_1' obrazuju poligonalnu liniju, liniju tangenata dijagrama (q, t) , jer je tangens nagibnog ugla tangente povučene na ovaj dijagram srazmeran specifičnom toplotnom kapacitetu, $c = dq / dt$.

Dijagram (q, t) treba upisati u poligon tangenti. On mora da prolazi kroz tačke B_i koje su presečne tačke vertikala povučenih iz tačaka A_i dijagrama (c, t) sa ovim tangentama.

Dokaz konstrukcije

Kod prethodne konstrukcije mora se voditi računa o razmerama. Pri ovome obe apscisne ose su x dok su ordinatne ose y i η . Stvarni specifični toplotni kapacitet, grafički se određuje kao:

$$c = u_c y = u_c \overline{P_0 A_i}, \quad y = \overline{P_0 A_i} \quad (34)$$

gde je razmera za stvarni specifični toplotni kapacitet u_c .

Isto tako je:

$$t = u_t x \rightarrow dt = u_t dx \quad (35)$$

dok je razmera za temperaturu u_t .

Za tačke A_i , prema gornjem dijagramu sa leve strane, uzimajući u obzir tangente donjeg dijagrama, biće:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{P_0 A_i}}{H_c} = \frac{d\eta}{dx} \rightarrow y dx = \overline{H_c} d\eta \quad (36)$$

Isto tako, za specifičnu količinu toplote prema (34) i (35) biće:

$$q = \int c dt = \int u_c y u_t dx = u_c u_t \int y dx \quad (37)$$

Sada je, s obzirom na (36):

$$q = u_c u_t \int \overline{H_c} d\eta = u_c u_t \overline{H_c} \int d\eta = u_c u_t \overline{H_c} \overline{\eta} \quad (38)$$

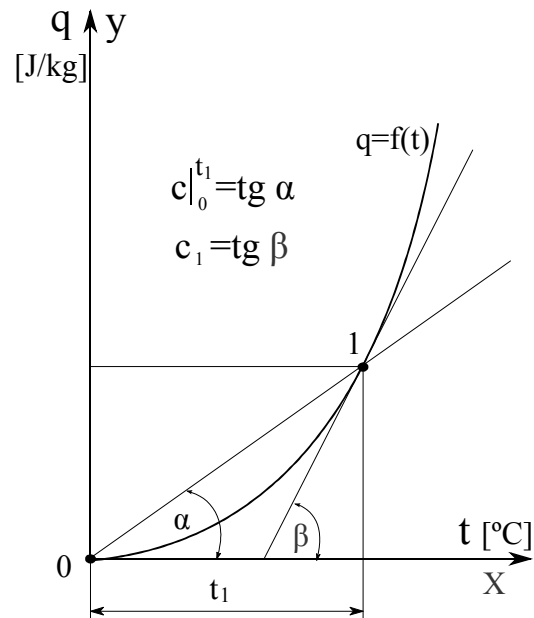
gde $\overline{\eta}$ predstavlja izmerenu ordinatu u (q, t) dijagramu. Iz relacije (38), s obzirom na dimenzije, biće:

$$q = u_q \overline{\eta} = \left[\frac{\text{J/kg}}{\text{mm}} \text{mm} \right] = \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (39)$$

Dobijena je jedinica za specifičnu količinu toplote, što se i očekivalo. Koeficijent razmere za specifičnu količinu prema kojem se nanosi podela na osi O_2q , a prema (38), je:

$$u_q = u_c u_t \overline{H_c} = \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \text{ } ^\circ\text{C} \text{ mm}} \frac{^\circ\text{C}}{\text{mm}} \text{mm} \right] = \left[\frac{\text{J}}{\text{kg mm}} \right] \quad (40)$$

Koristeći poznati dijagram (q, t) možemo za proizvoljnu tačku 1 za koju je temperatura t_1 , odrediti stvarni specifični toplotni kapacitet grafičkim postupkom, slika 6.



Slika 6. Grafičko određivanje specifičnih toplotnih kapaciteta c i c_u u dijagramu $q = f(t)$.

Figure 6. Graphical determination of specific heat capacities c and c_u in diagram, $q = f(t)$.

Uzimajući u obzir da je u opštem slučaju $C = dq / dt$, to za tačku 1 dijagrama (q, t) sledi da je:

$$C_1 = \left(\frac{dq}{dt} \right)_1 = \operatorname{tg} \beta \quad (41)$$

gde je β ugao tangente konstruisane u istoj tački.

Da bi se pri ovome dobili upotrebljivi rezultati, mora se odrediti odgovarajući koeficijent razmere za prethodnu konstrukciju.

Koordinatnom sistemu yoX , prema slici 6, odgovara sistem qot tako da je:

$$t = x u_t, \quad q = y u_q \quad (42)$$

Pri ovome razmere u kojima je nacrtan dijagram su:

$$u_t = \left[\frac{^\circ\text{C}}{\text{mm}} \right], \quad u_q = \left[\frac{\text{J}}{\text{kg mm}} \right]$$

dok su x i y izmerene veličine sa dijagrama.

Diferenciranjem relacije (42) biće:

$$dt = u_t dx, \quad dq = u_q dy \quad (43)$$

Ugao tangente u sistemu yoX je $\operatorname{tg} \beta = dy / dx$, odnosno prema (43):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{dq}{dt}}{u_t} = \frac{u_q}{u_t} \frac{dq}{dt} = \frac{u_q}{u_t} C \quad (44)$$

Odavde se dobija stvarni specifični toplotni kapacitet za proizvoljnu temperaturu kao:

$$C = \frac{u_q}{u_t} \operatorname{tg} \beta = p_r \operatorname{tg} \beta \quad (45)$$

Ovde je koeficijent razmere, sa kojim treba pomnožiti $\operatorname{tg} \beta$ da bi se dobio stvarni specifični toplotni kapacitet:

$$p_r = \frac{u_q}{u_t} = \left[\frac{\text{J}}{\text{kg } ^\circ\text{C}} \right] \quad (46)$$

Očigledno ovaj koeficijent ima dimenziju stvarnog specifičnog toplotnog kapaciteta. Za posmatrani proizvoljni temperaturni interval 0 do t_1 prema slici 6, može se takođe grafičkim postupkom odrediti srednji specifični toplotni kapacitet:

$$\bar{c} = c \Big|_0^{t_1} = \frac{\Delta q}{t_1} = \operatorname{tg} \alpha \quad (47)$$

gde je α ugao koji tetiva 0–1 zaklapa sa apscisom.

Kao i u prethodnom slučaju, da bi se dobio srednji specifični toplotni kapacitet, $\operatorname{tg} \alpha$ treba pomnožiti sa koeficijentom razmere, $p_r = u_q / u_t$

MOGUĆNOSTI PRIMENE DOBIJENIH REZULTATA

CO₂ kao poluidealan gas

Srednji specifični toplotni kapacitet pri $p = \text{const}$ za CO₂ kao poluidealan gas, određen je eksperimentalno u zavisnosti od temperature za 5 tačaka, prema tabeli 1. [44].

Tabela 1. Eksperimentalne vrednosti $\bar{c}_p = \bar{f}(t)$ za CO₂
Table 1. Experimental values $\bar{c}_p = \bar{f}(t)$ for CO₂

Eksp. tačka	1	2	3	4	5
$t / ^\circ\text{C}$	0	500	1000	1500	2000
$\bar{c}_p / \text{J kg}^{-1} ^\circ\text{C}^{-1}$	0,854	1,135	1,246	1,325	1,384

Konstrukcijom grafika $\bar{c}_p = \bar{f}(t)$ prema tabeli 1 za paža se da linearna i kvadratna aproksimativna funkcija ne bi zadovoljile. Kubna funkcija bi zadovoljila ali bi bilo neophodno primeniti, na primer, metodu najmanjih kvadrata. Da bi se do rešenja brže došlo, ne primenjujući računarski program, a s obzirom na broj eksperimentalnih tačaka, zavisnost će se pretpostaviti u obliku funkcije četvrtog stepena:

$$\bar{c}_p = \alpha + \beta t + \chi t^2 + \delta t^3 + \varepsilon t^4 \quad (48)$$

Zamenom eksperimentalnih vrednosti u (48) dobija se da je:

$$\begin{aligned} 0,854 &= \alpha + \beta \cdot 0 + \chi \cdot 0^2 + \delta \cdot 0^3 + \varepsilon \cdot 0^4 \\ 1,135 &= \alpha + \beta \cdot 500 + \chi \cdot 500^2 + \delta \cdot 500^3 + \varepsilon \cdot 500^4 \\ 1,246 &= \alpha + \beta \cdot 1000 + \chi \cdot 1000^2 + \delta \cdot 1000^3 + \varepsilon \cdot 1000^4 \quad (49) \\ 1,325 &= \alpha + \beta \cdot 1500 + \chi \cdot 1500^2 + \delta \cdot 1500^3 + \varepsilon \cdot 1500^4 \\ 1,384 &= \alpha + \beta \cdot 2000 + \chi \cdot 2000^2 + \delta \cdot 2000^3 + \varepsilon \cdot 2000^4 \end{aligned}$$

Koeficijenti funkcije (48) očigledno biće određeni iz uslova da kriva prolazi kroz sve eksperimentalne tačke, što će omogućiti veliku tačnost aproksimacije [36]. Iz prve jednačine, dobija se direktno koeficijent α dok je preostali sistem od četiri jednačine rešen Kramerovim pravilom, koristeći determinante, [34,35]:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,854; \beta = 8,87 \times 10^{-4}; \gamma = -8,47 \times 10^{-7}; \\ \delta &= 4,36 \times 10^{-10}; \varepsilon = -8,40 \times 10^{-14} \quad (50) \end{aligned}$$

Zamenom dobijenih koeficijenata u (48) dobija se tražena zavisnost

$$\begin{aligned} \bar{c}_p &= 0,854 + 8,87 \times 10^{-4} t - 8,47 \times 10^{-7} t^2 + \\ &+ 4,36 \times 10^{-10} t^3 - 8,4 \times 10^{-14} t^4 \quad (51) \end{aligned}$$

Prema tabeli 1, na slici 7 nacrtana je zavisnost $\bar{c}_p = \bar{f}(t)$.

Uzimajući u obzir izvedeni opšti model, relacija (24), stvarni specifični toplotni kapacitet u obliku analitičke zavisnosti $c = f(t)$, dobija se direktno, koristeći koeficijente iz relacije (51):

$$\begin{aligned} \bar{c}_p &= 0,854 + 17,74 \times 10^{-4} t - 25,41 \times 10^{-7} t^2 + \\ &+ 17,44 \times 10^{-10} t^3 - 42 \times 10^{-14} t^4 \quad (52) \end{aligned}$$

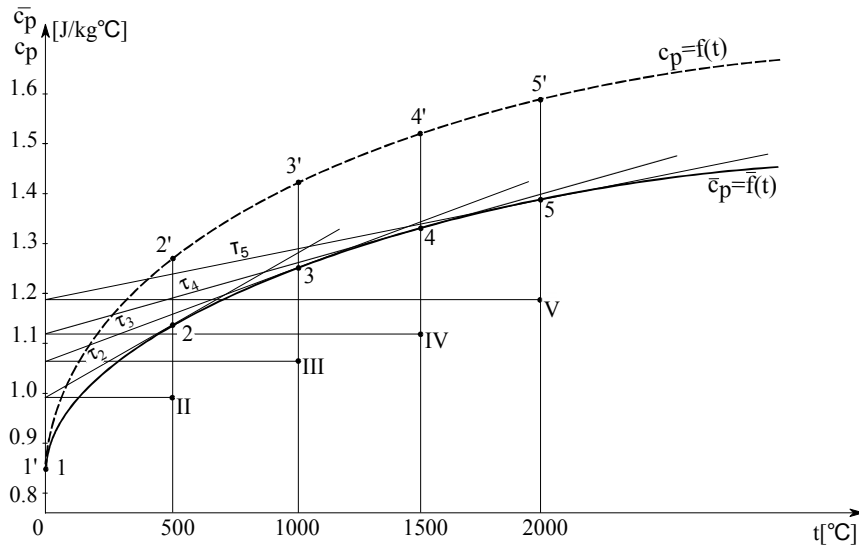
Konstrukcijom tangenti τ_i u eksperimentalnim tačkama 2–5 prema ranije razrađenom postupku, slika 4, dobijene su tačke 2'–5' traženog dijagrama $c_p = f(t)$, slika 7.

Ako se uporede dobijene grafičke vrednosti sa analitičkim vrednostima, vidi se da greška nije veća od 10%. Dobijeni dijagram $c_p = f(t)$, iskoristićemo za dobijanje još jednog dijagrama, $q = f(t)$, slika 8. Konstrukcija je izvedena prema proceduri prikazanoj u prethodnom poglavlju, slika 5.

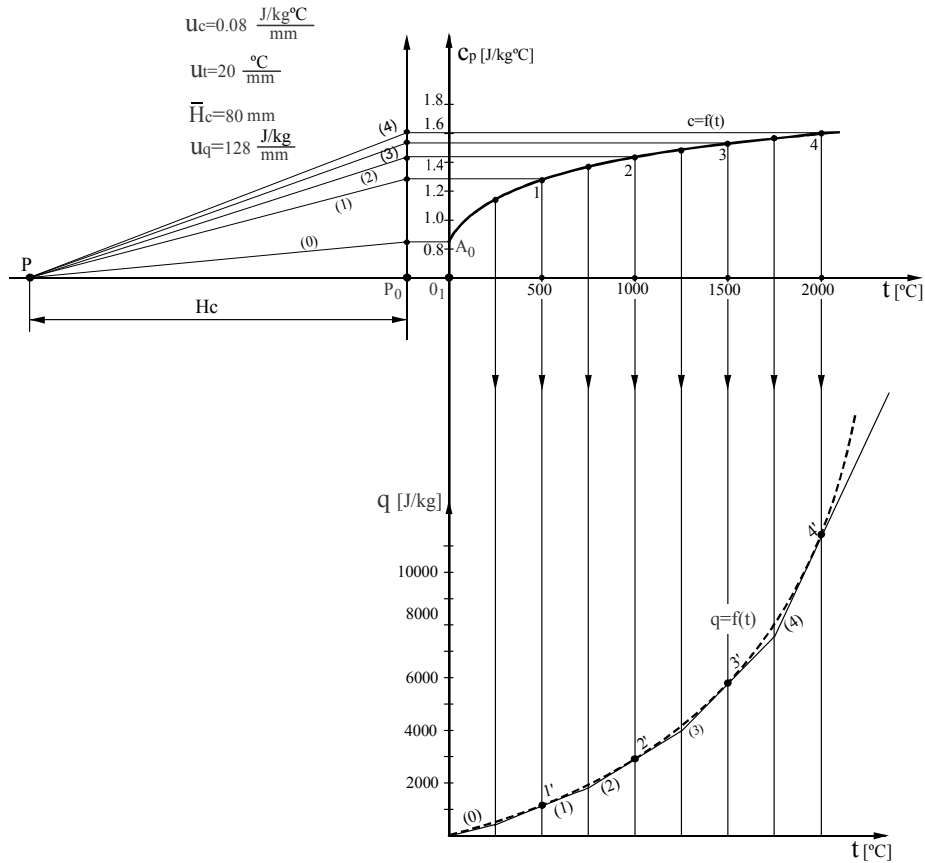
Treba zapaziti, s obzirom na to da je $q_0 = 0$, kriva prolazi kroz koordinatni početak.

Da bi dobili praktično upotrebljiv dijagram, neophodno je odrediti koeficijent razmere za specifičnu količinu toplote, prema relaciji (40):

$$u_q = u_c u_t \bar{H}_c = 0,08 \frac{\text{J/kg } ^\circ\text{C}}{\text{mm}} 20 \frac{^\circ\text{C}}{\text{mm}} 80 \text{ mm} = 128 \frac{\text{J/kg}}{\text{mm}} \quad (53)$$



Slika 7. Grafička konstrukcija dijagrama (c_p, t) pomoću dijagrama (\bar{c}_p, t) za CO_2 kao poluidealan gas.
 Figure 7. Graphical construction of the (c_p, t) diagram using the (\bar{c}_p, t) diagram for CO_2 as semiideal gas.



Slika 8. Grafička konstrukcija dijagrama (q, t) pomoću dijagrama (c_p, t) za CO_2 .
 Figure 8. Graphical design of diagram (q, t) using the diagram (c_p, t) for CO_2 .

Prema ovoj razmeri nanosimo podelu na osi O_2q , pošto je ona bila nepoznata. Razmera za osu O_2t je ista kao i kod dijagrama (c_p, t) .

Tačnost dobijenog dijagrama može se proveriti preko izvedene analitičke relacije (26) koja se jednostavno

određuje za dati primer. Može se pokazati da je tačnost za sve tačke manja od 12%.

Dvoatomni poluidealan gas

Kao što je rečeno, srednji molski specifični toplotni kapacitet pri $V = const$, prema Einsteinu, za dvoatomne

gasove dat je jednačinom (10) u obliku eksponencijalne funkcije u kJ/(kmol K).

Na bazi jednačine (10) i definicije za promenu unutrašnje energije, izvodi se srednji molarni specifični toplotni kapacitet za interval temperatura 0 do t [23,26]:

$$\bar{c}_v = 20,785 + 8,315 \frac{\theta}{t} \left(\frac{1}{e^{\frac{\theta}{t+273}} - 1} - \frac{1}{e^{\frac{\theta}{273}} - 1} \right) \text{ [kJ/(kmol K)]} \quad (54)$$

Primenom izvedenog analitičkog modela (17), koristeći relaciju (54) direktno će se odrediti relacija za stvarni molarni toplotni specifični kapacitet za proizvoljan temperaturski interval 0 do t .

Prvo se određuje izvod izraza (54), koristeći pravilo izvoda proizvoda:

$$\frac{d\bar{c}_v}{dt} = 8,315 \left[-\frac{\theta}{t^2} \left(\frac{1}{e^{\frac{\theta}{t+273}} - 1} - \frac{1}{e^{\frac{\theta}{273}} - 1} \right) + \frac{\theta}{t} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{e^{\frac{\theta}{t+273}} - 1} \right) \right] \quad (55)$$

Izvod poslednjeg člana u relaciji (55), s obzirom na izvod složene funkcije biće:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{e^{\frac{\theta}{t+273}} - 1} \right) = \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{\theta}{t+273}} - 1 \right)^{-1} = - \left(e^{\frac{\theta}{t+273}} - 1 \right)^{-2} e^{\frac{\theta}{t+273}} \frac{-\theta}{(t+273)^2} \quad (56)$$

Zamenom dobijenog izvoda u relaciju (55) biće:

$$\frac{d\bar{c}_v}{dt} = -\frac{8,315\theta}{t^2} \left(\frac{1}{e^{\frac{\theta}{t+273}} - 1} - \frac{1}{e^{\frac{\theta}{273}} - 1} \right) + \frac{8,315\theta}{t} \left(e^{\frac{\theta}{t+273}} - 1 \right)^{-2} e^{\frac{\theta}{t+273}} \frac{-\theta}{(t+273)^2} \quad (57)$$

Množenjem (57) sa temperaturom t , dobija se da je:

$$t \frac{d\bar{c}_v}{dt} = -\frac{8,315\theta}{t} \left(\frac{1}{e^{\frac{\theta}{t+273}} - 1} - \frac{1}{e^{\frac{\theta}{273}} - 1} \right) + 8,315\theta \left(e^{\frac{\theta}{t+273}} - 1 \right)^{-2} e^{\frac{\theta}{t+273}} \frac{-\theta}{(t+273)^2} \quad (58)$$

Za stvarni molarni toplotni kapacitet prema (17) biće:

$$c_v = \bar{c}_v + t \frac{d\bar{c}_v}{dt} \quad (59)$$

Zamenom (54) i (58) u (59), nakon određenih matematičkih operacija, dobija se konačno:

$$c_v = 20,785 + 8,315 \frac{\left(\frac{\theta}{t+273} \right)^2 e^{\frac{\theta}{t+273}}}{\left(e^{\frac{\theta}{t+273}} - 1 \right)^2} \text{ [kJ/(kmol K)]} \quad (60)$$

Proveru tačnosti relacije (60) možemo izvesti na primer za kiseonik kao poluidealan dvoatomni gas za temperaturu $t = 2227 \text{ }^\circ\text{C}$ ($T = 2500 \text{ K}$), gde je karakteristična temperatura $\theta = 3340 \text{ K}$ [2,7,8].

Zamenom ovih vrednosti u (60), stvarni molarni toplotni kapacitet biće:

$$c_v = 20,785 + 8,315 \frac{\left(\frac{3340}{2227+273} \right)^2 e^{\frac{3340}{2227+273}}}{\left(e^{\frac{3340}{2227+273}} - 1 \right)^2} = 27,996 \text{ kJ/(kmol K)}$$

Za zadati temperaturski interval, 1500–3000 $^\circ\text{C}$, srednji molarni toplotni kapacitet po linearnoj internacionalnoj formuli za O_2 biće [5,7]:

$$c_v = 20,52 + 0,00188t \text{ [kJ/(kmol K)]} \quad (61)$$

Koristeći izvedeni model (17), s obzirom na to da je za linearni model koeficijent $\beta = 2$, direktno se dobija relacija za stvarni molarni toplotni kapacitet:

$$c_v = 20,52 + 0,00376t \quad (62)$$

Zamenom zadate temperature u (62) dobija se da je:

$$c_v = 20,52 + 0,00376 \times 2227 = 28,893 \text{ kJ/(kmol K)}$$

Greška koja se čini korišćenjem Einstenovog modela je oko 3,1%.

Voda kao realan fluid

Prema Dietericiu, za interval temperatura od 0 do 250 $^\circ\text{C}$, za vodu se često u praksi srednji specifični toplotni kapacitet određuje prema relaciji [10,16,17]:

$$\bar{c} = 4,179 - 0,02169 \frac{t}{100} + 0,02893 \left(\frac{t}{100} \right)^2 \text{ [kJ/(kg }^\circ\text{C)]} \quad (63)$$

Relacija važi za normalan pritisak. S obzirom na model (17), relacija (63) ima oblik:

$$\bar{c} = \alpha + \beta t + \gamma t^2 \quad (64)$$

Poređenjem relacija (63) i (64), koeficijenti će biti:

$$\alpha = 4,179, \beta = -\frac{0,02169}{100}, \gamma = \frac{0,02893}{100^2} \quad (65)$$

Stvarni specifični toplotni kapacitet prema izvedenom modelu (17), odnosno prema relaciji (21) biće:

$$c = \alpha + 2\beta t + 3\gamma t^2 \quad (66)$$

Zamenom koeficijenata (65) u (66), biće konačno:

$$c = 4,179 - 0,04338 \frac{t}{100} + 0,08679 \left(\frac{t}{100}\right)^2 \text{ [kJ/(kg K)]} \quad (67)$$

Relacije (63) i (67) imaju paraboličnu zavisnost i predstavljene su na slici 9.

Stvarni specifični toplotni kapacitet, prema relaciji (66) ima svoj minimum pri:

$$\frac{dc}{dt} = 2\beta + 6\gamma t = 0 \quad (68)$$

Zamenom koeficijenata β i γ dobija se $t_m = 25 \text{ }^\circ\text{C}$, što predstavlja temperaturu pri kojoj je c_{\min} .

Poluidealni i realni gasovi

Za grupu poluidealnih gasova, azot i ugljen-dioksid kao i realne gasove, vazduh i vodenu paru, prema tabeli 2 dati su eksperimentalni podaci za srednji specifični

toplotni kapacitet pri normalnom pritisku. Podaci se odnose za temperaturski interval 0 do t i uzeti su prema literaturi [37–39].

Prema tabelarnim podacima, nacrtane su krive zavisnosti $c_p = f(t)$ za sve gasove na slikama 10 i 11.

Koristeći odgovarajući numerički program, s obzirom na oblik dobijenih krivih i širi temperaturski interval, sve krive su aproksimirane polinomom trećeg stepena.

$$\bar{c}_p = \alpha + \beta t + \chi t^2 + \delta t^3 \quad (69)$$

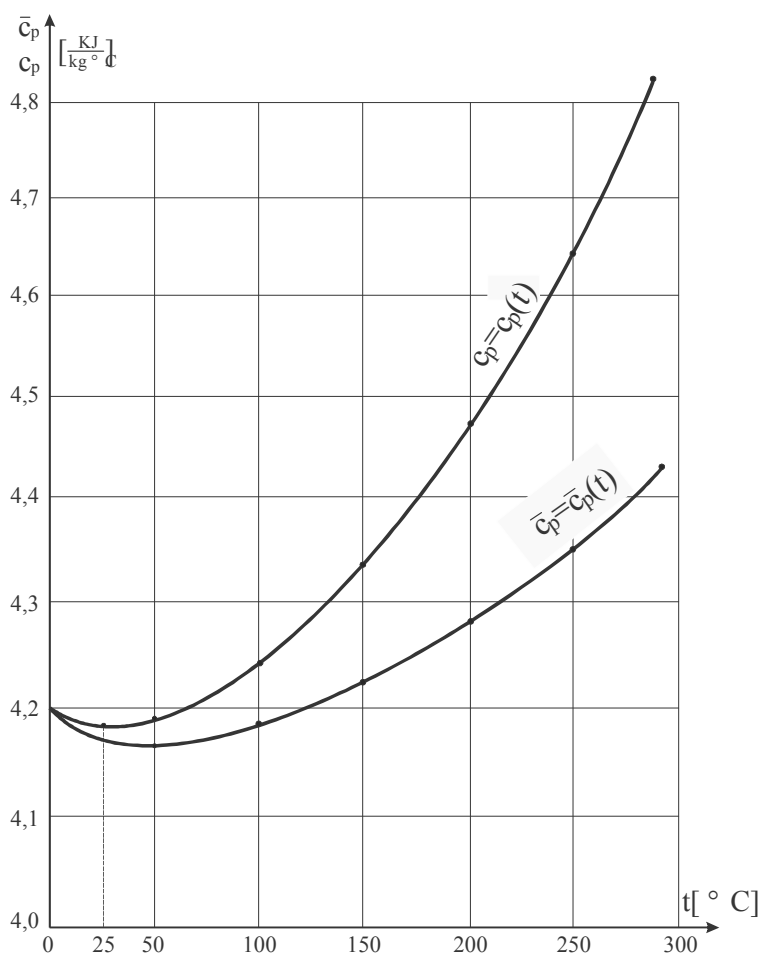
Preko istog programa izvršena je provera adekvatnosti modela kao i signifikantnosti koeficijenata

Koristeći opšti analitički model (24), zavisnost stvarnog specifičnog toplotnog kapaciteta od temperature dobija se direktno kao:

$$c_p = \alpha + 2\beta t + 3\chi t^2 + 4\delta t^3 \quad (70)$$

gde su koeficijenti α , β , γ i δ uzeti prema poznatoj relaciji (69).

Dobijeni analitički izrazi za \bar{c}_p i c_p za sve gasove uneseni su u tabelu 3.

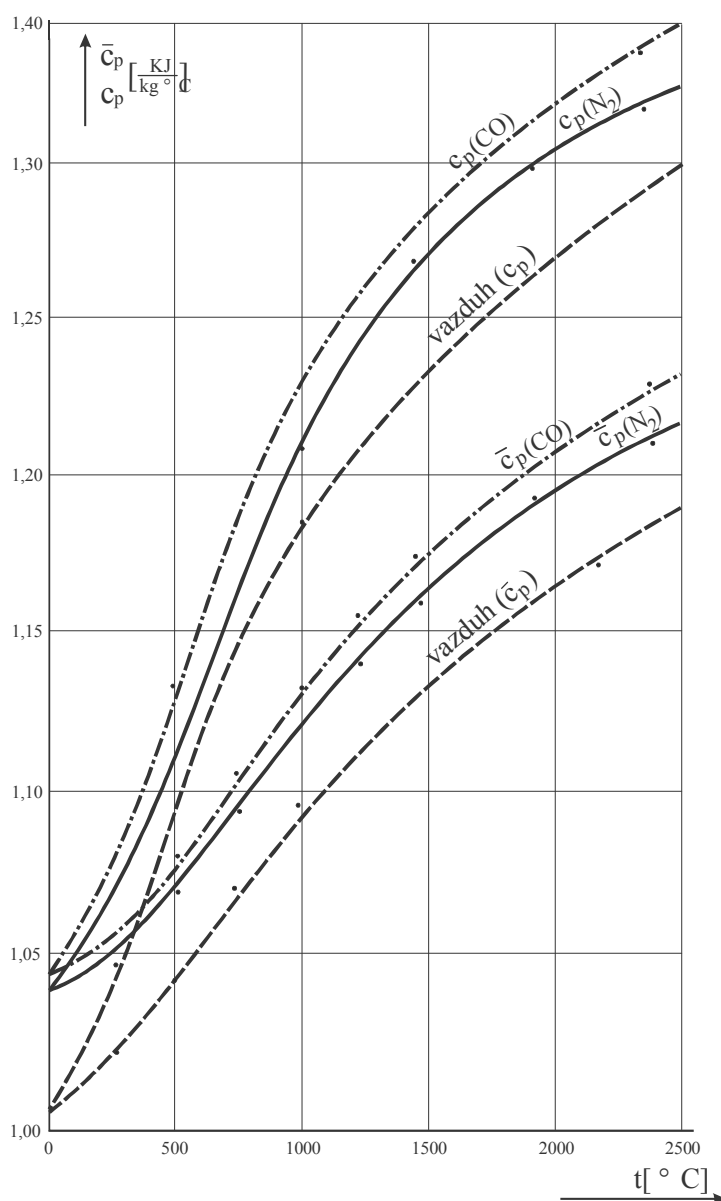


Slika 9. Zavisnost $c_p = c_p(t)$ dobijena na bazi $\bar{c}_p = \bar{c}_p(t)$ za vodu.

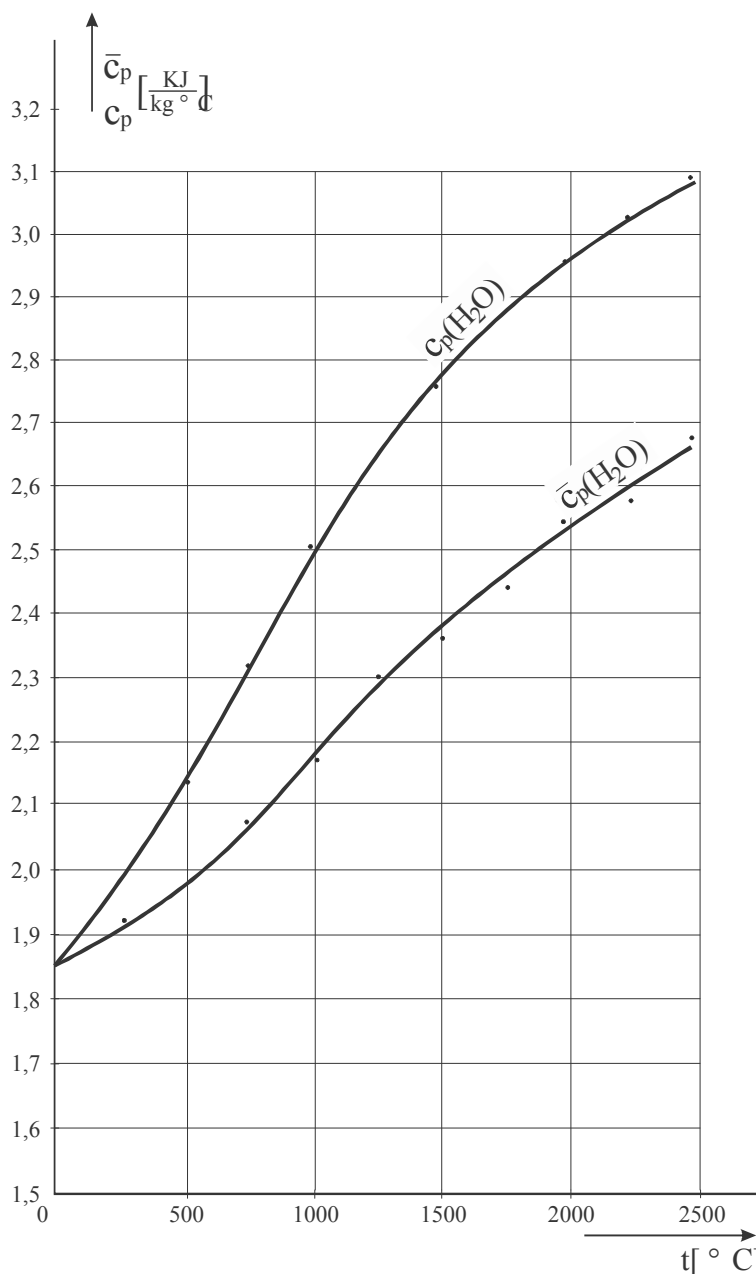
Figure 9. $c_p = c_p(t)$ dependence obtained from experimental $\bar{c}_p = \bar{c}_p(t)$ dependence for water.

Tabela 2. Eksperimentalne vrednosti za c_p nekih poluidealnih i realnih gasova u zavisnosti od temperature
 Table 2. Experimental values of c_p for few semiideal and real gases as a function of temperature

Redni broj	$T / ^\circ\text{C}$	N_2	CO	Vazduh	H_2O
1	0	1,039	1,040	1,004	1,858
2	250	1,046	1,050	1,016	1,960
3	500	1,066	1,075	1,039	2,010
4	750	1,094	1,105	1,066	2,052
5	1000	1,118	1,130	1,091	2,090
6	1250	1,140	1,154	1,113	2,160
7	1500	1,160	1,173	1,131	2,252
8	1750	1,177	1,190	1,147	2,360
9	2000	1,191	1,203	1,161	2,480
10	2250	1,203	1,216	1,173	2,501
11	2500	1,214	1,226	1,184	2,533



Slika 10. Zavisnosti $c_p = c_p(t)$ dobijene na bazi eksperimentalnih zavisnosti $\bar{c}_p = \bar{c}_p(t)$ za neke poluidealne gasove.
 Figure 10. $c_p = c_p(t)$ dependences obtained from experimental $\bar{c}_p = \bar{c}_p(t)$ dependence for some semiideal gases.



Slika 11. Zavisnosti $c_p = c_p(t)$ dobijene na bazi eksperimentalnih zavisnosti $\bar{c}_p = \bar{c}_p(t)$ za neke poluidealne gasove.
Figure 11. $c_p = c_p(t)$ dependences obtained from experimental $\bar{c}_p = \bar{c}_p(t)$ dependence for vapor.

Tabela 3. Stvarni i srednji specifični toplotni kapacitet poluidealnih i realnih gasova u analitičkom obliku
Table 3. Real and mean specific heat capacity of semiideal and real gases in analytical form

Red. br.	Gas	Specifični toplotni kapacitet, J/(kg °C)	Standardna greška, R^2
1	Azot	$\bar{c}_p = -1 \times 10^{-11} t^3 + 3 \times 10^{-8} t^2 + 6 \times 10^{-5} t + 1,034$	0,997
		$c_p = -4 \times 10^{-11} t^3 + 9 \times 10^{-8} t^2 + 12 \times 10^{-5} t + 1,034$	–
2	Ugljen-monoksid	$\bar{c}_p = -1 \times 10^{-11} t^3 + 2 \times 10^{-8} t^2 + 8 \times 10^{-5} t + 1,035$	0,999
		$c_p = -4 \times 10^{-11} t^3 + 6 \times 10^{-8} t^2 + 16 \times 10^{-5} t + 1,035$	–
3	Vazduh	$\bar{c}_p = -8 \times 10^{-12} t^3 + 2 \times 10^{-8} t^2 + 8 \times 10^{-5} t + 1,000$	0,998
		$c_p = -32 \times 10^{-12} t^3 + 6 \times 10^{-8} t^2 + 16 \times 10^{-5} t + 1,000$	–
4	Vodena para	$\bar{c}_p = 9,783 \times 10^{-11} t^3 - 2,204 \times 10^{-7} t^2 + 3,603 \times 10^{-4} t + 1,867$	0,997
		$c_p = 39,132 \times 10^{-11} t^3 - 6,612 \times 10^{-7} t^2 + 7,206 \times 10^{-4} t + 1,867$	–

Zavisnost $c_p = f(t)$, dobijena prema relaciji (70), za posmatrane gasove prikazana je takođe na slikama 10 i 11.

Upoređivanjem vrednosti dobijenih prema funkcijama $c_p = f(t)$, tabela 3, sa tabličnim vrednostima dobijenim eksperimentalno [39,40], zapaža se njihovo dobro slaganje.

DISKUSIJA REZULTATA

Iako se u praksi više koristi srednji specifični toplotni kapacitet, mnoge probleme u termodinamici poluidealnog i realnog gasa nemoguće je rešiti bez poznavanja stvarnog specifičnog toplotnog kapaciteta, odnosno njegove zavisnosti od temperature. Ovo posebno dolazi do izražaja kod teoretskih analiza i uspostavljanja termodinamičkih odnosa u diferencijalnom obliku, posebno kod određivanja karakterističnih termodinamičkih funkcija.

Zavisnost $\bar{c} = \bar{f}(t)$ za poluidealne i realne gasove, kada je u pitanju širi temperaturski interval uglavnom se prikazuje preko dve linearne funkcije dobijene na osnovu eksperimenata. Ova okolnost dovodi do otežanog određivanja korelacije $c = f(c)$ pa se zbog ovoga pribegava eksperimentalnom određivanju takođe dve linearne funkcije $c = f(t)$. Očigledno predloženi model rešava ovaj problem na efikasan način.

Eksperimentalni dijagram $\bar{c} = \bar{f}(t)$ i iz njega dobijeni dijagram $c = f(t)$, slika 4, mogu poslužiti za određivanje razmenjene specifične količine toplote planimetrijskom metodom, prema relaciji (2). Pri ovome razvijena količina toplote dobija se kao razlika odgovarajućih površina.

Na bazi poznatog eksperimentalnog dijagrama $\bar{c} = \bar{f}(t)$, kao što je pokazano pored dijagrama $c = f(t)$, grafičkim postupkom dobijen je još jedan dijagram, $q = f(t)$, čime uz minimalne troškove dobijamo više informacija o procesu.

Dobijeni dijagram razmenjena specifična količina toplote–temperatura, $q = f(t)$, slika 6, može se iskoristiti i za grafičko određivanje stvarnog, odnosno srednjeg toplotnog kapaciteta za proizvoljnu temperaturu t , odnosno interval temperatura 0 do t . Pri ovome, posebnu pažnju treba obratiti na koeficijent razmere.

Prikazana grafička rešenja u radu mogu zadovoljiti u mnogim slučajevima brzih odnosno ekspresnih kvantitativnih proračuna kao i kvalitativnih analiza.

Izvedena relacija (27) za razmenjenu specifičnu količinu toplote ima složeniji oblik od postojeće dve i može se primeniti u teoriji termodinamike poluidealnih gasova. Relacija važi takođe za gore definisani temperaturski interval.

ZAKLJUČAK

Prikazani model, za razliku od postojećeg, u opštem slučaju rešava postavljeni problem za širi temperaturski

interval 0 do t kada je zavisnost srednjeg specifičnog toplotnog kapaciteta polinom proizvoljnog stepena, odnosno proizvoljna eksponencijalna funkcija $c = \bar{f}(t)$.

Izvedene relacije mogu se smatrati opštim modelima, pa ih je moguće direktno primeniti za određivanje zavisnosti $c = f(t)$ i $q = f(t)$ bez izvođenja eksperimenta.

Predložena grafička konstrukcija za određivanje zavisnosti stvarnog od srednjeg toplotnog kapaciteta, može se primeniti za približno rešavanje problema u granicama grafičke tačnosti. Konstrukcijom većeg broja tangenti tačnost metode se povećava.

Uzimajući u obzir uslove pod kojima je izvedena glavna relacija modela sledi da se ista može primeniti za bilo koji proces poluidealnog i realnog gasa, odnosno fluida gde je poznata zavisnost srednjeg specifičnog toplotnog kapaciteta od temperature. Tačnost dobijenih rezultata prvenstveno zavisi od tačnosti eksperimentalne funkcije $\bar{c} = \bar{f}(t)$.

Sve relacije su izvedene za širi interval temperatura 0 do t , ali se na jednostavan način mogu primeniti za proizvoljan temperaturski interval t_1 do t_2 .

Izvedene glavne relacije modela u analitičkom obliku pogodne su za primenu kada se termodinamički proračuni izvode korišćenjem računara što je čest slučaj u novije vreme.

Grafička rešenja prikazana u radu u mnogim slučajevima omogućuju pregledniji prikaz, praćenje, analizu, komparaciju i optimizaciju termodinamičkih procesa, posebno u slučajevima gde je otežano analitičko rešenje i gde se ne zahteva veća tačnost. Isto tako ponekad je pogodno procese opisati i pratiti ne samo analitički već i grafički radi poređenja rezultata, odnosno otkrivanja mogućih analitičkih grešaka. Često se dešava, posebno u termodinamici realnog gasa da je analitička procedura komplikovana i dugotrajna pa je grafičko rešenje dobra alternativa. Isto tako grafička rešenja, znatno pomažu sagledavanju problema i poboljšavaju međusobno sporazumevanje.

LITERATURA

- [1] A. Bejan, *Advanced Engineering Thermodynamics*, John Wiley and Sons, New York, 1977.
- [2] B. Wood, *Application of Thermodynamics*, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1982.
- [3] H.D. Baehr, *Thermodynamik*, Springer Verlag, Berlin, 1989.
- [4] R. Balzhiser, M. Samuels, *Engineering Thermodynamics*, Prantice Hall, New Jersey, 1977.
- [5] V. Cengel, M. Boles, *Thermodynamics, An Engineering Approach*, McGraw-Hill, New York, 1994.
- [6] B.D. Đorđević, V.J. Valent, S.P. Šerbanović, *Termodinamika sa termotehnikom*, TMF, Beograd, 2007.
- [7] J. Kestin, *A Course in Thermodynamics*, Vol. I and II, McGraw-Hill, New York, 1979.

- [8] J.B. Jones, R.E. Dugan, *Engineering Thermodynamics*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [9] M. Novaković, M. Đurić, *Tehnička termodinamika*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1996.
- [10] В.А. Кирилин, А.Е. Шейндлин, *Экспериментальная термодинамика*, Госенергоиздат, Москва, 1990.
- [11] V.M. Fairs, C.M. Simmang, *Problems on Thermodynamics*, The Mac Millan Camp., 1992.
- [12] В.В. Перегудов, М.И. Роговой, *Тепловые процессы*, Стройиздат, Москва, 1993.
- [13] С.Л. Ривкин, *Термодинамические свойства газов*, Машиностроение, Москва, 1983.
- [14] V. Waylen, R. Sonntag, *Fundamentals of Classical Thermodynamics*, John Wiles, New York, 1995.
- [15] E.F. Overt, *Concepts of Thermodynamics*, McGraw-Hill Book, New York, 1990.
- [16] М. Вукалович, И. Новиков, *Уравнение состояния реальных газов*, Госенергоиздат, Москва, 1995.
- [17] М.П. Вукалович, Й.М. Новиков, *Техническая термодинамика*, Энергия, Москва, 1988.
- [18] G.K. Kozić, *Termodinamika, inženjerski aspekti*, Mašinski fakultet, Beograd, 2007.
- [19] M. Marić, Đ. Maričić, *Termodinamika i prenos toplote*, Mašinski fakultet Mostar, 1995.
- [20] B. Đorđević, V. Valent, S. Šerbanović, *Termodinamika sa termotehnikom*, Tehnološko–metalurški fakultet, Beograd, 2007.
- [21] Đ. Kozić, *Termodinamika, inženjerski aspekti*, Mašinski fakultet Beograd, 2003.
- [22] F. Bošnjaković, *Nauka o toplini, I, II i III deo*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1994.
- [23] W. Christian, *Einführung die technische Thermodynamik*, KNF, Leipzig, 1993.
- [24] R.W. Haywood, *Analysis of Engineering Cycles*, Pergamon press, Oxford, New York, 1995.
- [25] J.B. Fenn, *Engines, Energy and Entropy*, W.H. Freeman and Comp., New York, 1996.
- [26] R.C. Reid, T.K. Sherwood, *The properties of Gases and Liquids*, McGraw–Hill, New York, 1986.
- [27] J. Kalčík, *Technická termodinamika*, Československa akademie ved, Praha, 1983.
- [28] W. Haberman, J. John, *Engineering Thermodynamics with Heat Transfer*, Allyn and Boston, 1994.
- [29] G. Kortum, H. Lachmann, *Einführung in die Chemische Thermodynamik*, Verlag Chemie, Weinheim, 1991.
- [30] J. Nekolny, *Analitická Thermodynamika*, ČHA, Praha, 1987.
- [31] K. Guminski, *Thermodynamica*, PWN, Warszawa, 1986.
- [32] U. Grigull, *Technische Thermodynamik*, Walter de Gruyter, Berlin, 1986.
- [33] В.П. Преображенский, *Теплотехнические измерения и приборы*, Газ, Москва, 1986.
- [34] D.S. Mitrinović, *Matematika I i II*, Građevinska knjiga, Beograd, 2001.
- [35] И.Н. Бронштейн, *Справочник по математике*, ГИФМЛ, Москва, 1998.
- [36] I. Pantelić, *Uvod u teoriju inženjerskog eksperimenta*, RU R. Ćirpanov, Novi Sad, 1986.
- [37] K. Ražnjević, *Toplinske tablice i dijagrami*, Đuro Đaković, Slavonski Brod, 1984.
- [38] М.П. Вукалович, *Таблицы термодинамических свойств воды и водяного пара*, Госенергоиздат, Москва, 1993.
- [39] B. Đorđević, A. Tasić: *Tablice i dijagrami termodinamičkih veličina*, TMF, Beograd, 1978.
- [40] Đ. Kozić, B. Vasiljević, V. Bekavac, *Priručnik za termodinamiku*, Mašinski fakultet, Beograd, 1999.
- [41] S. Rašajski, D.P. Đakov, *Priručnik za približno izračunavanje osobina gasova i tečnosti*, Naučna knjiga, Beograd, 1989.
- [42] W. Emmerich, L. Trever, *Heat Capacities Liquids, Solutions and Vapours*, The Royal Society of Chemistry, UK, 2010.
- [43] E.P. Bruce, M.P. John, *The Properties of Gases and Liquids*, 5th edition, McGraw Hill, 2001.
- [44] А.И. Вейник, *Техническая термодинамика и основы теплопередачи*, Metallurgizdat, Москва, 1986.
- [45] N. Dadgostar, J.M. Shaw, *A predictive correlation for the constant-pressure specific heat capacity of pure and ill-defined liquid hydrocarbons*, *Fluid Phase Equilib.* **313** (2012) 211–226.
- [46] D.E. Diller, *The specific heats (c_v) of dense simple fluids*, *Cryogenics* **11** (1971) 186–191.

SUMMARY

SUITABLE MODEL FOR THE CALCULATION OF THE CORRELATION BETWEEN THE REAL AND THE AVERAGE SPECIFIC HEAT CAPACITY AND POSSIBILITIES OF ITS APPLICATION

Branko B. Pejović, Ljubica C. Vasiljević, Vladan M. Mičić, Mitar D. Perušić

University of East Sarajevo, Faculty of Technology Zvornik, Republic of Srpska, Bosnia and Herzegovina

(Professional paper)

Starting from the definition of the average specific heat capacity for a chosen temperature range, the analytic dependence between the real and the mean specific heat capacities is obtained using differential and integral calculation. The obtained relation in differential form for the defined temperature range allows for the problem to be solved directly, without any special restrictions on its use. Using the obtained relation, a general model in the form of a polynomial of arbitrary degree in the function of temperature was derived, which has a more suitable and faster practical application and is more general in character than the existing model. A new graphical method for solving the problem is obtained based on differential geometry and using the derived equation. This may also have practical significance, since many problems in thermodynamics are solved analytically and graphically. This result was used in order to obtain the amount of specific heat exchanged using an analytical model or a planimetric method. In addition, this graphical solution was used for the construction of the diagram showing the dependence between the specific heat exchanged and temperature. This diagram also gives a simple graphical procedure for the calculation of the real and the average specific heat capacity for arbitrary temperature or temperature interval. The confirmation for all graphic constructions is obtained using the differential properties between thermodynamic units. In order for the graphical solutions presented to be applicable in practice, suitable ratio coefficients have been determined for all cases. Verification of the model presented, as well as the possibilities of its application, were given using several characteristic examples of semi-ideal and real gases. Apart from linear and non-linear functions in the form of polynomials, the exponential function of the dependence between specific heat capacities and temperature was also analysed in this process.

Keywords: Real specific heat capacity • Average specific heat capacity • Semi-ideal gas • Real gas • Specific heat exchanged • Differential geometry • Analytical correlation • Graphic constructions