

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/314370192>

# Određivanje frekvencijskih karakteristika sklopa glavnog vretena mašine alatke primjenom Ojler – Bernulijeve teorije greda i pozicionog sprezanja

Conference Paper · March 2016

CITATIONS

0

READS

111

3 authors:



[Aleksandar Košarac](#)

University of East Sarajevo

23 PUBLICATIONS 54 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



[Milan Zeljković](#)

University of Novi Sad

163 PUBLICATIONS 326 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



[Aleksandar Zivkovic](#)

University of Novi Sad

66 PUBLICATIONS 171 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

# Određivanje frekvencijskih karakteristika sklopa glavnog vretena mašine alatke primjenom Ojler – Bernulijeve teorije greda i pozicionog sprežanja

Aleksandar Košarac  
Mašinski fakultet Istočno Sarajevo  
Univerzitet u Istočnom Sarajevu  
Istočno Sarajevo, RS, BiH  
akosarac@gmail.com

Milan Zeljković  
Cvijetin Mladenović  
Aleksandar Živković  
Univerzitet u Novom Sadu  
Fakultet tehničkih nauka, Departman za proizvodno mašinstvo  
Novi Sad, Republika Srbija  
[milanz@uns.ac.rs](mailto:milanz@uns.ac.rs); [mldja@uns.ac.rs](mailto:mldja@uns.ac.rs), [acoz@uns.ac.rs](mailto:acoz@uns.ac.rs)

*Sažetak*— U radu je prikazana analitička metoda određivanja prenosne funkcije sklopa glavnog vretena mašine alatke, kao osnova za određivanje karte stabilnosti. Glavno vreteno se modeluje iz segmenata, uključujući i mjesta oslonaca (ležajeve), koristeći pri tome Ojler – Bernulijevu teoriju greda. Prenosna funkcija sklopa glavnog vretena se određuje metodom pozicionog sprežanja prenosnih funkcija segmenata za određene granične uslove, odnosno krutosti i prigušenja mjesta spoja segmenata, zatim oslonaca (ležajeve) i sl. Verifikacija dobijenih matematičkih modela izvršen je numerički, primjenom metoda konačnih elementata, kao i eksperimentalnim ispitivanjem, tj. eksperimentalnom modalnom analizom.

*Ključne riječi* - Sklop glavnog vretena, mašina alatka, sprežanje prenosnih funkcija, karta stabilnosti

## I. UVOD

Na dinamičko ponašanje mašine alatke tokom eksploatacije dominantan uticaj ima ponašanje sklopa glavnog vretena. Modalna analiza sklopa glavnog vretena predstavlja primarni problem analize dinamičkih karakteristika, uzimajući u obzir uticaj vibracija na kvalitet obrade i na habanje komponenti mašinskog sistema. Imajući u vidu činjenicu da se tokom eksploatacije mašine alatke pojavljuju razne kombinacije režima rezanja, u cilju izbjegavanja režima koji dovode do pojave samoizazvanih vibracija, kao najnepovoljnijeg tipa vibracija, najjednostavnije je koristiti kartu stabilnosti. Karta stabilnosti definiše stabilno i nestabilno područje eksploatacije mašine alatke u zavisnosti od dubine rezanja, broja obrtaja glavnog vretena i pomaka, a sastoji se od niza ispresjecanih talasastih krivih koje predstavljaju granicu stabilnosti. Uslov za konstruisanje karte stabilnosti je poznavanje funkcije prenosa tačke dodira (pomjeranja), odnosno postojanje modela ponašanja vrha glavnog vretena. Karta stabilnosti mašine alatke se može definisati analitički i eksperimentalno, s tim da je moguće i kombinovati ova dva načina. Analitički metod određivanja karte stabilnosti se zasniva na teorijskim osnovama koje su sredinom prošlog vijeka postavili Tobias [1] i Tlustý [2], koji su istraživali pojavu regenerativnog efekta pri ortogonalnom rezanju i vremenski nezavisnim faktorima procesa kao što su smjer sile rezanja i debljina strugotine. Altintas [3] prezentuju analitički način određivanja karte

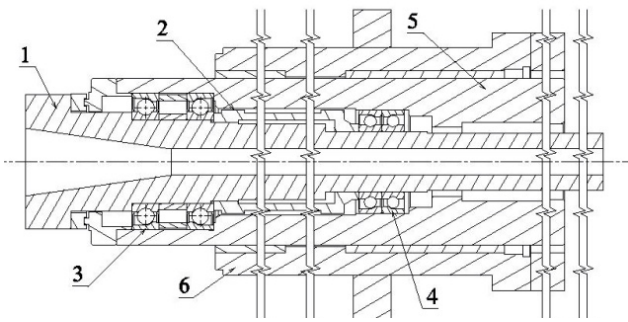
stabilnosti pri obradi glodanjem primjenom Floquet-ove teoreme. Za definisanje karte stabilnosti ovim metodama potrebno je odrediti funkciju prenosa vrha alata, odnosno realni deo njegove prenosne funkcije, preko koga je moguće povezati širinu rezanja, direktno zavisnu od dubine rezanja i broj obrtaja glavnog vretena, odnosno:

$$b = \frac{-1}{2k_s G_r} \quad (1)$$

gdje su  $b$ -širina strugotine,  $k_s$  - jedinična sila rezanja i  $G_r$  - realni dio prenosne funkcije u tački dodira alata i obratka. U ovom radu prikazana je analitička metoda određivanja prenosne funkcije, kao osnova za određivanje karte stabilnosti. Prema ovoj metodi, glavno vreteno se posmatra kao slobodno oslonjena greda, kojoj se na slobodnim krajevima određuju prenosne funkcije koristeći pri tome Ojler – Bernulijevu teoriju greda i metodu pozicionog sprežanja. Glavno vreteno se modeluje iz segmenata, uključujući i mjesta oslonaca (ležajeve). Prenosna funkcija se određuje metodom pozicionog sprežanja prenosnih funkcija segmenata za određene granične uslove, kao što su krutosti i prigušenja mjesta spoja, oslonaca (ležajeve) i sl.

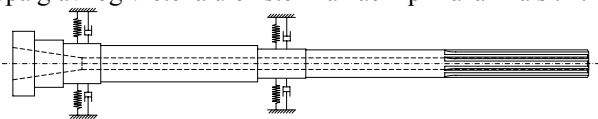
## II. ANALITIČKI NAČIN ODREĐIVANJA DINAMIČKIH KARAKTERISTIKA SLOBODNO OSLOJENOG GLAVNOG VRETENA

U radu se analizira dinamičko ponašanje sklopa glavnog vretena modula radne jedinice (jedinice pinole), za koje se određuju matematički model dinamičkog ponašanja. Modul radne jedinice predstavlja glavno vreteno uležšteno u aksijalno pomerljivoj čauri (pinoli) sa pogonsko – prenosnom strukturom za glavno obrtno i pomoćno pravolinijsko kretanje, sl. 1.



Slika 1. Sklop glavnog vretena 1. glavno vreteno, 2. distantna čaura, 3. prednje uležištenje, 4. zadnje uležištenje, 5. pinola 6. čaura pinole

Kako je pokazano na slici 1. modul radne jedinice se sastoji od većeg broja različitih dijelova, odnosno podsistema, različitog nivoa složenosti. Međutim, za pojednostavljenu analizu može se posmatrati ekvivalentan dinamički model sklopa glavnog vretena uležišten na način prikazan na sl. 2.



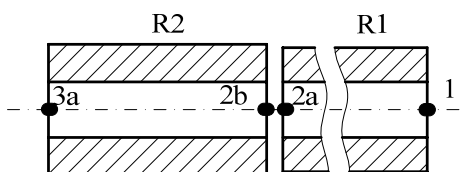
Slika 2. Model sklopa glavnog vretena jedinice pinole

Glavno vreteno, prikazano na sl. 2 uležišteno je na dva oslonca. Oba uležištenja su izvedena u "O" rasporedu, s tim da se za prednje uležištenje koristi par kugličnih jednoređnih hibridnih ležaja SKF S7011 CD/HCP4A, a za zadnje par ležajeva SKF 7008 CD/HCP4A. Vrijednosti krutosti uležištenja u zavisnosti od prednaprezanja date su u [4]. Zbog potrebe aksijalnog pomeranja pinole pri pomoćnom kretanju sklop glavnog vretena ima specifično konstrukciono rješenja, sa slobodnim krajem vretena relativno velike dužine. Zbog toga se razmatra dinamičko ponašanje (pomjeranje) slobodnog kraja, kao i vrha glavnog vretena.

Ukoliko se posmatraju dva krajnja desna segmenta slobodno oslonjenog glavnog vretena, prikazana na sl. 3, matrice pomjeranja pri krutoj vezi između segmenata imaju sljedeći oblik:

$$R_1 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12a} \\ R_{2a1} & R_{2a2a} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} R_{2b2b} & R_{2b3a} \\ R_{3a2b} & R_{3a3a} \end{bmatrix} \quad (3)$$



Slika 3. Slobodno oslonjeni segmenti glavnog vretena (dva krajnja desna segmenta)

gdje su  $R_j$  matrice koje opisuju translatorska i rotaciona pomjeranja komponenti u tačkama  $i, j$ .

Pri tome svaka podmatrica uključuje prenosne funkcije krajeva koje u obzir uzimaju ugib i nagib u tački, kao i silu i moment, što je dato u sljedećim izrazima:

$$R_{11} = \begin{bmatrix} h_{11} & l_{12a} \\ n_{2a1} & p_{2a2a} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$h_{11} = \frac{x_1}{f_1}, l_{11} = \frac{x_1}{m_1}, n_{11} = \frac{\vartheta_1}{f_1}, p_{11} = \frac{\vartheta_1}{m_1} \quad (5)$$

U izrazu 5.  $h_{11}$  predstavlja odnos pomjeranja i sile  $f_1$ ,  $l_{11}$  odnos pomjeranja i momenta savijanja  $m_1$ ,  $n_{11}$  nagiba i sile  $f_1$ , te  $p_{11}$  nagiba i momenta savijanja  $m_1$ .

Nakon što se odrede prenosne funkcije obje komponente, primjenom uslova kompatibilnosti i ravnoteže prenosna funkcija spregnutih segmenata može se izraziti kao

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Pri tome su

$$G_{11} = R_{11} - R_{12a} (R_{2a2a} + R_{2b2b})^{-1} R_{2a1} \quad (7)$$

$$G_{12} = R_{12a} (R_{2a2a} + R_{2b2b})^{-1} R_{2b3a} \quad (8)$$

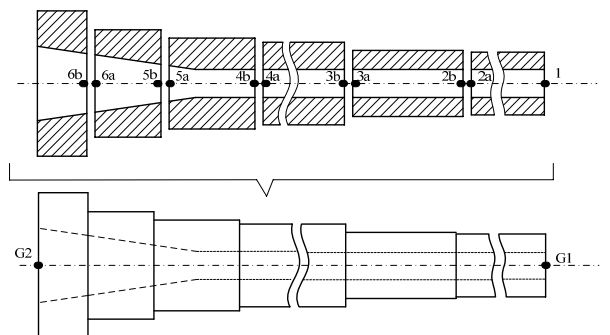
$$G_{21} = R_{3a2b} (R_{2a2a} + R_{2b2b})^{-1} R_{2a1} \quad (9)$$

$$G_{22} = R_{3a3a} - R_{3a2b} (R_{2a2a} + R_{2b2b})^{-1} R_{2b3a} \quad (10)$$

Na isti način može se izvršiti sprezanje sljedećeg segmenta: dva prethodno spregnuta segmenta se sada posmatraju kao jedan, kom se dodaje (sa lijeve strane) sljedeći segment, te ponavlja prethodno opisani postupak, pri čemu je broj ponavljanja jednak broju segmenata koji se sprežu.

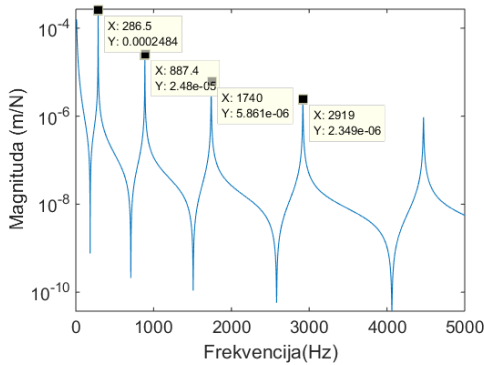
Sprezanje više od dva segmenta može se izvesti i "direktno", izvođenjem jednačina sprezanje više segmenata na osnovu uslova kompatibilnosti i ravnoteže na rubu tijela, odnosno graničnih i početnih uslova. Jednačina sprezanja šest segmenata, na koliko je razmatrano glavno vreteno jedinice pinole podijeljeno, sl. 4, glasi:

$$G_{11} = R_{11} - \left( R_{12} \left( R_{211} + R_{122} - R_{212} \left( R_{311} + R_{222} - R_{312} \left( R_{411} + R_{322} - R_{412} \left( R_{511} + R_{422} - R_{512} (R_{611} + R_{522})^{-1} R_{521} \right)^{-1} R_{421} \right)^{-1} R_{321} \right)^{-1} R_{221} \right)^{-1} R_{121} \right) \quad (11)$$



Slika 4. Glavno vreteno jedinice pinole, segmentisano i nakon sprezanja

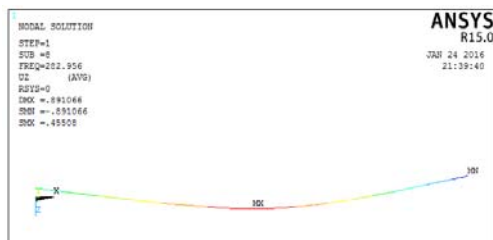
Na sl. 5. prikazan je Bodeov dijagram prenosne funkcije slobodno oslonjog glavnog vretena, dobijene sprežanjem šest segmenata (sl. 4), pri čemu se uzima da je veza između svakog od segmenata kruta.



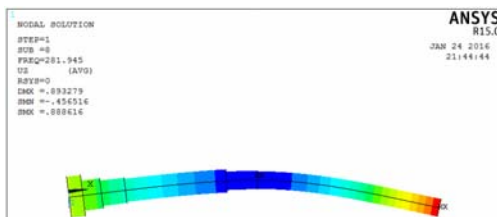
Slika 5. Amplitudno-frekvencijska karakteristika slobodno oslonjenog glavnog vretena

### III. NUMERIČKO I EKSPERIMENTALNO ODREĐIVANJE DINAMIČKIH KARAKTERISTIKA SLOBODNO OSLOJENOG GLAVNOG VRETENA

Na sl. 6. i sl. 7. prikazani su rezultati modalne analize slobodno oslonjenog glavnog vretena. Dat je prvi oblik oscilovanja, odnosno prva sopstvena frekvencija oscilovanja dobijeni u APDL okruženju i to primjenom BEAM188 konačnog elementa tipa grede (sl. 6), odnosno SOLID186 konačnog elementa (sl. 7).

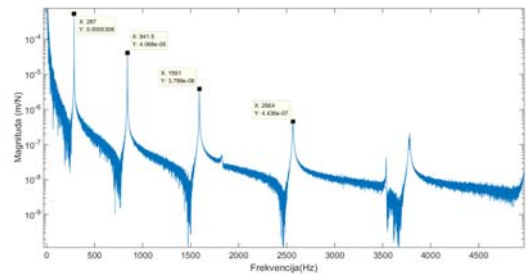


Slika 6. Prvi oblik oscilovanje glavnog vretena, BEAM188 konačni element



Slika 7. Prvi oblik oscilovanja glavnog vretena, SOLID186 konačni element

Eksperimentalno dobijena amplitudno-frekvencijska karakteristika, iz koje je moguće odrediti prenosnu funkciju sistema slobodno oslonjenog glavnog vretena prikazana je na sl. 8.



Slika 8. Eksperimentalno određene amplitudno-frekvencijska karakteristika

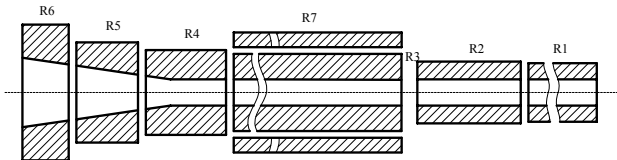
Uporedni prikaz dobijenih rezultata (sopstvenih frekvencija oscilovanja) sa odstupanjem u procentima u odnosu na eksperimentalno dobijene rezultate dat je u tabeli 1. Smatrajući eksperimentalno dobijene rezultati najtačnijim, može se zaključiti da je na prvoj sopstvenoj frekvenciji oscilovanja dosta dobra usaglašenost dobijenih rezultata i relativno malo odstupanje za svaku izvršenu analizu, naime rezultati dobijeni analitički odstupaju 0,34%, a rezultati dobijeni primjenom metoda konačnih elemenata 1,7%, odnosno 1,4% zavisno od tipa primenjenog konačnog elementa. Međutim, na višim sopstvenim frekvencijama može se uočiti veće odstupanje analitički dobijenih rezultata, dok su odstupanja numerički dobijenih rezultata dosta mala. Do povećanja odstupanja na višim sopstvenim frekvencijama dobijenih primjenom analitičke metode zasnovane na Ojler – Bernulijevoj teoriji greda, u odnosu na eksperimentalne rezultate dolazi zbog ne uzimanja u obzir uticaja tangencijalnih napona pri primeni analitička metoda. Sa druge strane primjena analitičke metode daje sasvim zadovoljavajuće rezultate na nižim sopstvenim frekvencijama. Pri višim sopstvenim frekvencijama bolji rezultati se mogu ostvariti primjenom Timošenkove teorije greda, s obzirom da Timošenkova teorija u obzir uzima i efekat smicanja unutar jednačine greda.

TABELA I. POREĐENJE REZULTATA MODALNE ANALIZE SLOBODNO OSLOJENOG GLAVNOG VRETENA

Način određivanja sopstvenih frekvencija	Mod 1 (Hz)	Mod 2 (Hz)	Mod 3 (Hz)	Mod 4 (Hz)
APDL BEAM188	282,9 (1,4%)	855,1 (1,6%)	1631,6 (2,55%)	2636,4 (2,8%)
APDL SOLID 186	281,9 (1,74%)	854,6 (1,6%)	1629,1 (2,45%)	2629,3 (2,45%)
Analitička metoda zasnovana na primjeni Ojler – Bernulijeve teorije greda i metodi pozicionog spreznja	286,5 (0,34%)	887,4 (5,5%)	1740 (9,3%)	2919 (13,8%)
Eksperimentalno određene sopstvene frekvencije	287	841,5	1591	2564

#### IV. ANALITIČKI NAČIN ODERĐIVANJA DINAMIČKIH KARAKTERISTIKA SLOBODNO OSLOJENOG SKLOPA GLAVNOG VRETENA

Sklop glavnog vretena, dat na sl. 9, čini glavno vreteno, ležajevi koji se nalaze na mjestima segmenata R2 i R4, te distantna čaura R7. S obzirom da u montiranom stanju između segmenta R3 i R7 postoji zazor, distantna čaura se smatra "paralelno spregnutim segmentom" u odnosu na segment R3, za razliku od segmenata R1-R6 koji se smatraju "redno spregnutim segmentima".



Slika 9. Slobodno oslonjen sklop glavnog vretena

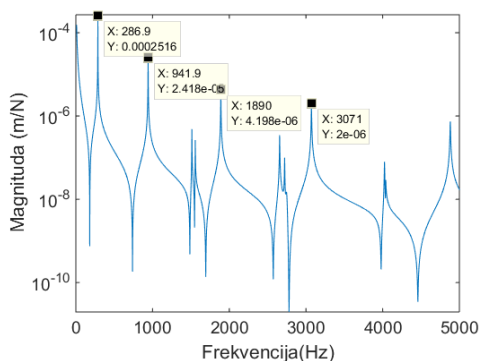
Ležajevi se pri analitičkom modelovanju slobodno oslonjenog sklopa glavnog vretena neće uzimati u razmatranje, budući da bi značajno usložnili model, a pri tome se njihov uticaj na sopstvenu frekvenciju slobodno oslonjenog sklopa glavnog vretena može zanemariti zbog relativno male mase u odnosu na masu glavnog vretena sa distantnom čaurom. Pri definisanju analitičkog modela, prvo se posmatraju segmenti R3 i R7 koji se sprežu paralelno, a potom se pravi redna veza svih segmenata na ranije opisan način.

Pri tome je

$$h3_{11} = \frac{h3_{11} * h7_{11}}{h3_{11} + h7_{11}}, l3_{11} = \frac{l3_{11} * l7_{11}}{l3_{11} + l7_{11}} \quad (12)$$

$$n3_{11} = \frac{n3_{11} * n7_{11}}{n3_{11} + n7_{11}}, p3_{11} = \frac{p3_{11} * p7_{11}}{p3_{11} + p7_{11}} \quad (13)$$

Slika 10. predstavlja amplitudno-frekventnu karakteristiku prenosne funkcije slobodno oslonjenog sklopa glavnog vretena, koja je određena analitički, sprežanjem prethodno određenih prenosnih funkcija dijelova glavnog vretena.



Slika 10. Analitički određena amplitudno – frekventna karakteristika slobodno oslonjenog sklopa glavnog vretena

U tabeli 2. date su uporedne vrijednosti rezultata modalne analize sklopa glavnog vretena dobijene analitički i eksperimentalnim ispitivanjem. I u ovom, kao i u prethodnom

slučaju, rezultati dobijeni analitički imaju dosta dobra pokapanja sa eksperimentalno dobijenim rezultatima na prvoj sopstvenoj frekvenciji, ali odstupanje raste sa porastom frekvencije, što je posljedica primjene Ojler Bernulijeve teorije greda koja ne uzima u obzir uticaj smicanja.

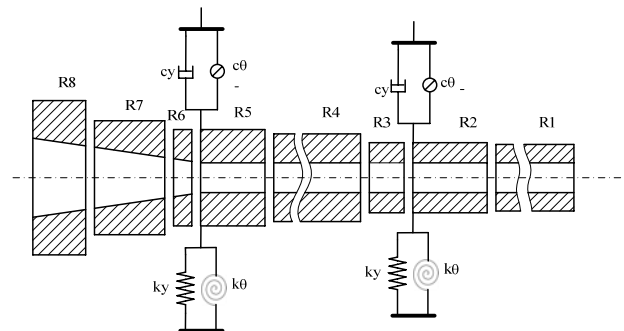
Uporedne vrijednosti rezultata modalne analize sklopa glavnog vretena

Način određivanja sopstvenih frekvencija	Mod 1 (Hz)	Mod 2 (Hz)	Mod 3 (Hz)	Mod 4 (Hz)
Analitička metoda zasnovana na primjeni Ojler – Bernulijeve teorije greda i metodi pozicionog sprežanja	286,9 (4,6%)	941,9 (9,1%)	1890 (29%)	3071 (25,1%)
Eksperimentalno određene sopstvene frekvencije	274,2	863,5	1465	2453

#### V. ANALITIČKO ODERĐIVANJE DINAMIČKIH KARAKTERISTIKA ULEŽIŠTENOG GLAVNOG VRETENA

U prethodnim razmatranjima određena je prenosna funkcija glavnog vretena, odnosno sklopa glavnog vretena, sprežanjem prenosnih funkcija segmenata koji se posmatraju kao slobodno oslonjeni (*free – free*). Međutim, glavno vreteno mašine alatke je uležišteno, pa je stoga na mjestima oslonaca potrebno modelovati dinamiku ležajeva, odnosno odgovarajuću krutost i prigušenje.

S tim u vezi potrebno je izvršiti novu podjelu modela glavnog vretena na segmente, pri čemu je potrebno voditi računa da se mjesto oslonca, odnosno ležaj, uvijek nalazi na kraju određenog segmenta. Ovo podrazumjeva veći broj segmenata, u konkretnom slučaju osam. Na sl. 11. prikazan je model uležištenog glavnog vretena, na kom je prikazano da se prvo sprežu segmenti R1 i R2, zatim se dodaju krutost i prigušenje koji odgovaraju krutosti i prigušenju desnog (zadnjeg) oslonca. Nakon toga se dobijena struktura spreže se segmenom R3 itd.



Slika 11. Uležišten model glavnog vretena

Krutost i prigušenje oslonaca (ležajeva) se u dinamički model glavnog vretena uključuju primjenjujući strukturalnu modifikacionu metodu [5]. Prema ovoj metodi, matrica pomjeranja modifikovanog sistema (glavnog vretena sa ležajevima), dobija se korištenjem matrice pomjeranja

nemodifikovanog sistema, u ovom slučaju matrice pomjeranja slobodno oslonjenih segmenata i poznate krutosti i prigušenja ležaja. U konkretnom slučaju, prvo se određuje matrica pomjeranja kruto spregnutih segmenata R1 i R2, koja ima oblik

$$G = \begin{bmatrix} H_{11} & L_{11} & H_{12} & L_{12} \\ N_{11} & P_{11} & N_{12} & P_{12} \\ H_{21} & L_{21} & H_{22} & L_{22} \\ N_{21} & P_{21} & N_{22} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Modifikovana matrica pomjeranja se dobije ukoliko se izvrše elementarne transformacije nad redovima i kolonama matrice pomjeranja

$$\alpha G = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & L_{11} & L_{12} \\ H_{21} & H_{22} & L_{21} & L_{22} \\ N_{11} & N_{12} & P_{11} & P_{12} \\ N_{21} & N_{22} & P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Nadalje, neka je D dinamička strukturalna modifikaciona matrica koja uključuje translatorne i rotacione krutosti i prigušenja oslonca.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_\theta \end{bmatrix} \quad (16)$$

pri čemu prethodni izrazi predstavljaju kompleksne vrijednosti krutosti i prigušenja ležajeva.

$$K_y = k_y + i\omega c_y \quad (17)$$

$$K_\theta = k_\theta + i\omega c_\theta \quad (18)$$

Matrica pomjeranja modifikovanog sistema može se, prema [5] izraziti kao

$$\alpha G' = \left[ [I] + [\alpha G][D] \right]^{-1} [\alpha G] \quad (19)$$

Što se u formi pojedinačnih matrica može napisati kao

$$[\alpha_{G'}^{11}] = \left[ [I] + [\alpha_G^{11}][D^{11}] \right]^{-1} [\alpha_G^{11}] \quad (20)$$

$$[\alpha_{G'}^{12}]^T = [\alpha_{G'}^{21}] = [\alpha_G^{21}] \left[ [I] - [D^{11}] \right] [\alpha_G^{11}] \quad (21)$$

$$[\alpha_{G'}^{22}] = [\alpha_G^{22}] - [\alpha_G^{21}][D^{11}][\alpha_G^{12}] \quad (22)$$

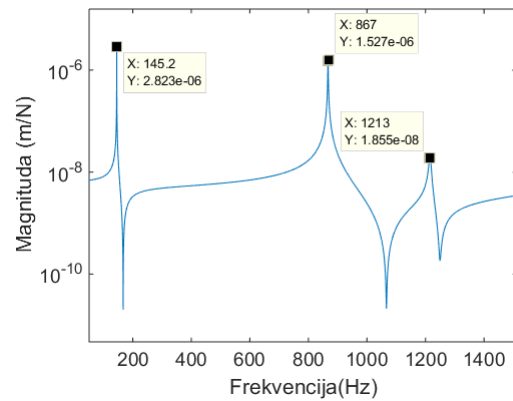
U prethodnim izrazima  $[I]$  je jedinična matrica, a  $[D^{11}]$  podmatrica modifikacione matrice D

$$[D^{11}] = \begin{bmatrix} k_y & 0 \\ 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (23)$$

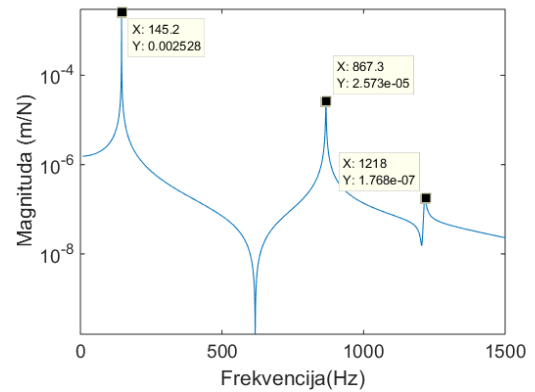
koja se dobije primjenom elementarnih transformacija nad redovima i kolonama matrice D.

$$D = \begin{bmatrix} K_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Nakon što se modeluje zadnji oslonac, nastavlja se procedura sprežanja segmenta R3, R4 i R5, nakon čega se ponovo dodaje ležaj na prethodno opisan način, a zatim i preostali segmenti R6, R7 i R8, sl. 11. Prenosne funkcije Hij (direktna i unakrsna) uležištenog glavnog vretena date su na sl. 12-13. Može se uočiti da je amplituda pomjeranja slobodnog kraja glavnog vretena značajno veća u odnosu na vrh glavnog vretena, što je i očekivano.



Slika 12. Amplitudno – frekvijska karakteristika vrha glavnog vretena H11

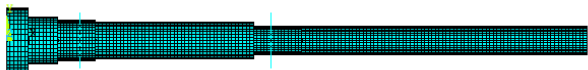


Slika 13. Amplitudno – frekvijska karakteristika zadnjeg kraja glavnog vretena H22

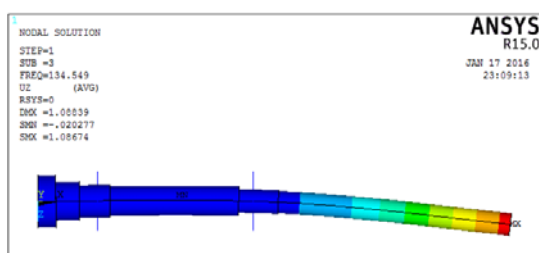
## VI. NUMERIČKO ODERĐIVANJE DINAMIČKIH KARAKTERISTIKA ULEŽIŠTENOG GLAVNOG VRETENA

Na sl. 14 prikazano je glavno vreteno sa osloncima modelovano u Ansys APDL. Numerička analiza je izvedena primjenom 3D konačnih elemenata SOLID186, kao i konačnog

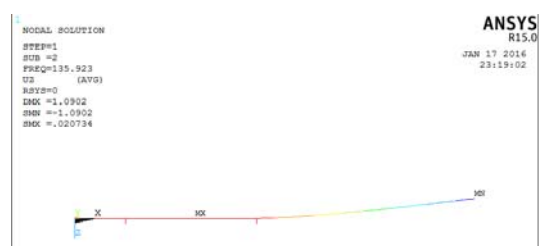
elemenat tipa grede BEAM 188. Za oba navedena slučaja izvršena je modalna analiza pri čemu su određena prve četiri sopstvene frekvencije oscilovanja. Na sl. 15 prikazana je prva sopstvena frekvencija i oblik oscilovanja dobijeni primjenom 3D konačnog elementa SOLID 186, a na sl. 17 prva sopstvena frekvencija i oblik oscilovanja dobijeni primjenom BEAM188 konačnog elementa. Pri diskretizaciji 3D tipom konačnih elemenata SOLID 186 generisano je ukupno 17167 konačnih elemenata, dok je za modelovanje krutosti oslonaca korišćen konačni element COMBIN 14 koji posjeduje svojstvo krutost i prigušenje.



Slika 14. Ansys APDL model glavnog vretena konačni element SOLID 186



Slika 15. Prva sopstvena frekvencija oscilovanja APDL SOLID 186



Slika 16. Prva sopstvena frekvencija oscilovanja APDL BEAM 188

Poređenjem frekvencija oscilovanja dobijenih analitički sa frekvencijama oscilovanja dobijenim numerički, primjenom konačnog elementa BEAM188 i SOLID186, prikazanih u tabeli III, može se uočiti sljedeće: prva sopstvena frekvencija oscilovanja dobijena primjenom konačnog elementa BEAM188 odstupa 6,7% u odnosu na sopstvenu frekvenciju dobijenu analitički, treća sopstvena frekvencija oscilovanja -3,4 %, četvrta sopstvena frekvencija -12,3%, dok druga sopstvena frekvencija oscilovanja dobijena numerički (805,5 Hz) nije dobijena analitičkim putem. Primjenom konačnog elemenata SOLID186 dobijeni su približno isti rezultati za prvu sopstvenu frekvenciju oscilovanja, odstupanja na trećoj sopstvenoj frekvenciji oscilovanja su 3,2 %, a na četvrtoj 0,1%.

TABELA II. POREĐENJE REZULTATA ANALITIČKOG PRORAČUNA I MODALNE ANALIZE ULEŽIŠTENOG GLAVNOG VRETENA

Način određivanja sopstvenih frekvencija	Mod 1 (Hz)	Mod 2 (Hz)	Mod 3 (Hz)	Mod 4 (Hz)
APDL BEAM188	135,923	805,555	896,9	1384,13
APDL SOLID 186	134,549	797,513	839,019	1201,31
Analitički	145,2	-	867	1216

## VII. ZAKLJUČCI

U radu je prikazana analitička metoda određivanja prenosne funkcije vrha glavnog vretena mašine alatke pri različitim načinima oslanjanja. Razmatrano je slobono oslonjeno glavno vreteno, slobodno oslonjen sklop glavnog vretena (glavno vreteno, ležajevi i distanciona čaura), te uležišteno glavno vreteno.

Poredeći rezultate dobijene numerički i analitički može se konstatovati da prezentovani matematički model daje zadovoljavajuće rezultate, s tim da postoji prostor za unapređenje razvijenih algoritama, prije svega primjenom Timošenkove teorije greda.

## LITERATURA

- [1] Tobias, S.,A., Fishwick, W., The chatter of lathe tools under orthogonal cutting conditions, Transactions of ASME 80 (1958) 1079-1088
- [2] Tlusty, J., Polacek, M., The stability of machine tools against self-excited vibrations in machining, in: Proceedings of the ASME International Research in Production Engineering, Pittsburgh, USA, 1963, pp. 465-474
- [3] Altintas, Y., Budak, E., Analytical prediction of stability lobes in milling, Annals of the CIRP 44 (1995), 357-362
- [4] Zeljković, M.: Sistem za automatizovano projektovanje i predikciju ponašanja sklopa glavnog vretena mašina alatki, Doktorska disertacija, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 1996
- [5] H.N. Özgüven, Structural modification using frequency response functions, Mechanical Systems and Signal Processing 4 (1) (1990) 53-63
- [6] Košarac, S.: Razvoj mašina alatki primenom virtualnih modela sa posebnim osvrtom na dinamičko ponašanje sklopa glavnog vretena, doktorska disertacija (rukopis), Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2016
- [7] Živković, A.: Računarska i eksperimentalna analiza ponašanja kugličnih ležaja za specijalne namene, Doktorska disertacija, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2013

## ABSTRACT

This paper presents the analytical method for determining the transfer function of the main spindle machine tools tip, as the basis for determining the stability lobe diagram. The main spindle is modelled from segments, including places of supports (bearings), using the Euler - Bernoulli beam theory. The transfer function is determined using receptance coupling method for specific boundary conditions, i.e. stiffness and damping of the joints, supports (bearings) etc. Verification of the obtained mathematical models is done by the finite element analysis, as well as experimentally, i.e. performing experimental modal analysis.

### DETERMINING OF FREQUENCY CHARACTERISTICS OF MACHINE TOOL MAIN SPINDLE USING EULER – BERNOULLY BEAM THEORY AND RECEPTANCE COUPLING

Aleksandar Košarac, Milan Zeljković, Cvjetin Mladenović, Aleksandar Živković