

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/328018864>

Analitičko određivanje sopstvenih frekvencija pogonskog vratila

Conference Paper · October 2018

CITATIONS

0

READS

156

4 authors, including:



Nikola Vucetic

University of East Sarajevo

17 PUBLICATIONS 29 CITATIONS

SEE PROFILE



Aleksandar Košarac

University of East Sarajevo

23 PUBLICATIONS 56 CITATIONS

SEE PROFILE



Mirko Blagojevic

University of Kragujevac

81 PUBLICATIONS 799 CITATIONS

SEE PROFILE



ANALITIČKO ODREĐIVANJE SOPSTVENIH FREKVENCIJA POGONSKOG VRATILA

Nikola Vučetić¹, Aleksandar Košarac², Mirko Blagojević³, Ranko Antunović⁴

Rezime: Modalna analiza je dinamička analiza linearnih sistema sa N stepeni slobode koja se zasniva na metodi razvijanja po vlastitim oblicima ili tonovima. Kroz ovaj rad je prikazano analitičko određivanje sopstvenih frekvencija oscilovanja pogonskog vratila mjenjačkog prenosnika snage DMB 6.80.235 primjenom Ojler-Bernulijeve teorije greda. Dobijeni rezultati su poređeni sa rezultatima sopstvenih frekvencija baziranim na ranijim istraživanjima, a dobijenim na osnovu eksperimentalne postavke, kao i numeričkim putem uz upotrebu software-a Ansys Workbench 12.1. Konačan cilj rada je dobijanje pouzdanog matematičkog modela sprežanjem parcijanih prenosnih funkcija.

Ključne riječi: matematički model, modalna analiza, Ojler-Bernulijeva teorija greda, pogonsko vratilo, sopstvene frekvencije

ANALYTICAL DETERMINATION OF DRIVE SHAFT NATURAL FREQUENCIES

Abstract: Modal analysis is a dynamic analysis of linear systems with N degrees of freedom, which is based on the method of developing on its own forms or tones. This paper shows analytical determination of gearbox DMB 6.80.235 drive shaft natural frequencies using Euler-Bernoulli beam theory. Obtained results were compared with natural frequencies results based on previous research that were obtained by an experiment and by numerical method using Ansys Workbench 12.1 software. The final paper goal is to obtain a reliable mathematical model by partial transfer functions coupling.

Key words: mathematical model, modal analysis, Euler-Bernoulli beam theory, drive shaft, natural frequencies

¹ Nikola Vučetić, mr, Mašinski fakultet I. Sarajevo (CA), I. Sarajevo, BiH, vuceticnikola@yahoo.com

² Doc. dr Aleksandar Košarac, Mašinski fakultet I. Sarajevo, I. Sarajevo, BiH, akosarac@gmail.com

³ Prof. dr Mirko Blagojević, Fakultet inženjerskih nauka, Kragujevac, Srbija, mirkob@kg.ac.rs

⁴ Prof. dr Ranko Antunović, Mašinski fakultet I. Sarajevo, I. Sarajevo, BiH, rankoantunovicmf@gmail.com

1 UVOD

Modalna analiza je dinamička analiza linearnih sistema sa N stepeni slobode koja se zasniva na metodi razvijanja po vlastitim oblicima ili tonovima. Ova metoda je primjenjiva ako je vremenska zavisnost sila pobude svih masa ista ili srazmjerno ista. U opštem slučaju, možemo reći da je modalna analiza proces kojim opisujemo frekvenciju, prigušenje i modalni oblik konstrukcije, dakle, njene osnovne dinamičke parametre [1]. U ovome radu se razmatra način dobijanja prenosne funkcije sistema na osnovu prenosnih funkcija podsistema, određenih matematički, numerički ili eksperimentalnim ispitivanjem. Pod pojmom sistem, u ovom slučaju, podrazumijevaće se sklop ili geometrijsko tijelo složenog oblika koje će se dalje, u cilju dobijanja prenosne funkcije posmatrati kao skup međusobno povezanih geometrijskih tijela jednostavnijeg oblika, odnosno podsistema [2]. Opterećuje li se konstrukcija konstantnom silom koja osciluje, tako da joj se frekvencija mijenja tokom vremena, odgovor konstrukcije u vidu pomaka, brzine ili akceleracije će se mijenjati, te će, pri određenim frekvencijama, dostizati maksimalne vrijednosti. Frekvencije kod kojih se postižu maksimalne vrijednosti odgovora odgovaraju sopstvenim frekvencijama konstrukcije. Modalna analiza se može izvršiti analitičkim ili eksperimentalnim metodama, pri čemu eksperimentalne metode, u većini slučajeva, služe za provjeru tačnosti analitičkih matematičkih modela [1]. Konačna eksperimentalna modalna analiza se zasniva na mjerenju ulaznih funkcija pobude i izlaznih funkcija odgovora konstrukcije [3]. Između ovih funkcija se uspostavlja veza preko funkcije frekventnog odgovora koja je nezavisna od ulazne pobude i opisuje odgovor konstrukcije između mjernih tačaka. Modalna analiza se najčešće provodi da bi se smanjio nivo nepoželjnih vibracija [4]. Modalna analitička i numerička analiza su prikazane na primjeru određivanja sopstvenih frekvencija kontinualnih greda [5]. Konačan cilj ovoga rada je dobijanje pouzdanog matematičkog modela sprezanjem parcijanih prenosnih funkcija na primjeru pogonskog vratila (slika 1) iz sklopa mjenjačkog prenosnika snage DMB 6.80.235.



Slika 1. Pogonsko vratilo

2 PRIMIJENJENE METODE

2.1 Analitička metoda

U ovom poglavlju prikazana je analitička metoda određivanja prenosne funkcije primjenom pozicionog sprezanja (engleski *receptace coupling*), te je izvršena verifikacija dobijenih rezultata-sopstvenih frekvencija oscilovanja pogonskog vratila primjenom metode konačnih elemenata i eksperimentalnim ispitivanjem. Sprezanjem direktnih i ukrštenih prenosnih funkcija podsistema se razmatraju mogućnosti određivanja direktne i ukrštene prenosne funkcije sistema [2]. Prenosne funkcije podsistema se sprežu za različite granične uslove, pod čim se podrazumijeva uslov ravnoteže i uslov

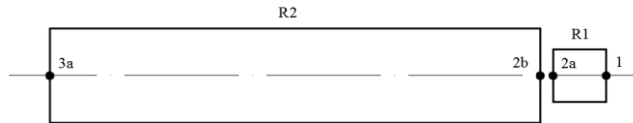
kompatibilnosti na granici tijela. U radu je izložen koncept pozicionog spreznjanja koji je, potom, verifikovan na primjeru određivanja prenosne funkcije pogonskog vratila matematičkim putem, izvođenjem i spreznjanjem prenosnih funkcija dobijenih na osnovu Ojler-Bernulijeve teorije greda, zatim numerički primjenom metoda konačnih elementa, te, na kraju, i eksperimentalnim ispitivanjem. Konačan cilj je pouzdan matematički model dobijen spreznjanjem parcijanih prenosnih funkcija. Prenosna funkcija elemenata određuje se na krajevima slobodno oslonjenih segmenata. Prenosna funkcija spregnutog sistema određuje se na slobodnom kraju ili na mjestima spoja. Prenosne funkcije elemenata označene slovima h , l , n i p definisane su kao [6]:

$$h_{jk} = \frac{x_j}{f_k}, l_{jk} = \frac{\theta_j}{m_k}, n_{jk} = \frac{g_j}{f_k}, p_{jk} = \frac{g_j}{m_k}, \quad (1)$$

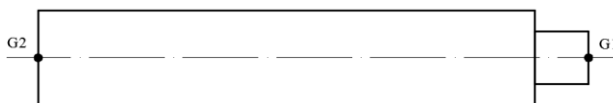
pri čemu su slovima x i θ označeni ugib i nagib, dok su sa f i m označeni sila i moment u određenoj tački. Ukoliko se posmatraju dva krajnja desna segmenta slobodno oslonjenog vratila, prikazana na slici 2, matrice pomijeranja pri krutoj vezi između segmenata imaju sljedeći oblik [6]:

$$R_1 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12a} \\ R_{2a1} & R_{2a2a} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} R_{2b2b} & R_{2b3a} \\ R_{3a2b} & R_{3a3a} \end{bmatrix} \quad (3)$$



Slika 2. Slobodno oslonjeni segmenti vratila (dva krajnja desna segmenta)



Slika 3. Slobodno oslonjeni segmenti vratila nakon spreznjanja

Pri tome svaka podmatrica u izrazima 2 i 3 uključuje prenosne funkcije krajeva koje u obzir uzimaju ugib i nagib u tački, kao i silu i moment, 4, 5 [6]:

$$R_{11} = \begin{bmatrix} h_{11} & l_{12a} \\ n_{2a1} & p_{2a2a} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$h_{11} = \frac{x_1}{f_1}, l_{11} = \frac{\theta_1}{m_1}, n_{11} = \frac{g_1}{f_1}, p_{11} = \frac{g_1}{m_1} \quad (5)$$

Nakon što se odrede prenosne funkcije obje komponente, primjenom uslova kompatibilnosti i ravnoteže, prenosna funkcija spregnutih segmenata datih na slici 3 se može izraziti kao [6]:

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Pri tome su [6]:

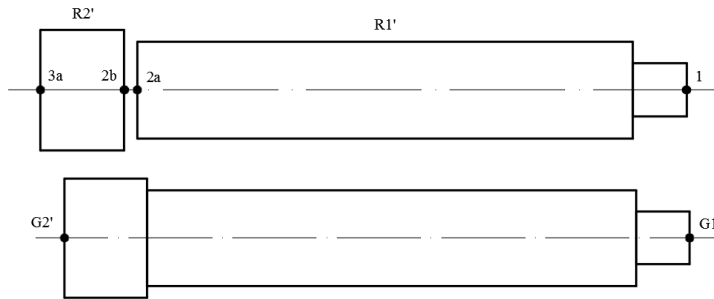
$$G_{11} = R_{11} - R_{12a} (R_{2a2a} + R_{2b2b})^{-1} R_{2a1} \quad (7)$$

$$G_{12} = R_{12a} (R_{2a2a} + R_{2b2b})^{-1} R_{2b3a} \quad (8)$$

$$G_{21} = R_{3a2b} (R_{2a2a} + R_{2b2b})^{-1} R_{2a1} \quad (9)$$

$$G_{22} = R_{3a3a} - R_{3a2b} (R_{2a2a} + R_{2b2b})^{-1} R_{2b3a} \quad (10)$$

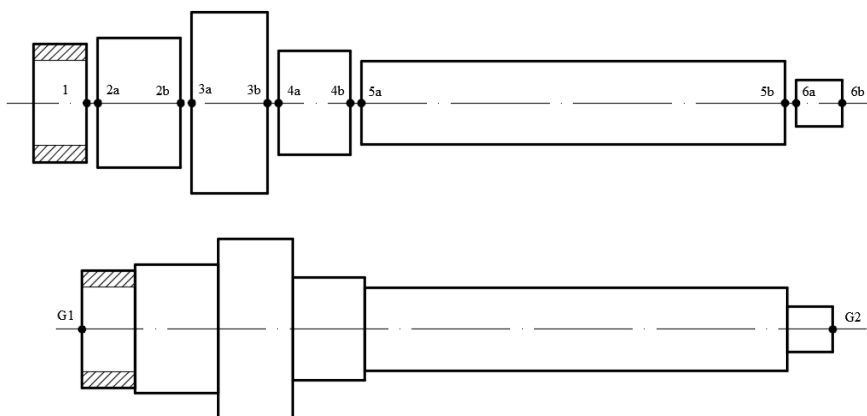
Na isti način se može izvršiti sprezanje sljedećeg segmenta: dva prethodno spregnuta segmenta se sada posmatraju kao jedan kome se dodaje (sa lijeve strane) sljedeći segment, te se ponavlja postupak opisan matričnim jednačinama 4-10, slika 4. Pri tome je broj ponavljanja jednak broju segmenata koji se sprežu.



Slika 4. Sprezanje trećeg segmenta sa prethodno spregnutim segmentima

Sprezanje više od dva segmenta može se izvesti i „direktno“, izvođenjem jednačina sprezanje više segmenata za određene granične uslove. Jednačina sprezanja šest segmenata, koliko pogonsko vratilo sadrži u ovom slučaju, slika 5, glasi [3]:

$$G_{11} = R_{11} - \left(\begin{array}{c} R_{12} \\ \left(\left(\left(R_{211} + R_{122} - \left(R_{212} \left(\left(R_{311} + R_{222} - \left(R_{312} \left(\left(R_{411} + R_{322} - \left(R_{412} \left(\left(R_{511} + R_{422} - \left(R_{512} (R_{611} + R_{522})^{-1} R_{521} \right)^{-1} \right) R_{421} \right)^{-1} \right) R_{321} \right)^{-1} \right) R_{221} \right)^{-1} \right) \right) \right) \right) R_{121} \end{array} \right) \quad (11)$$

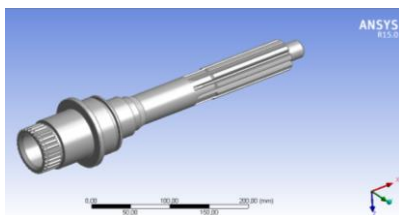


Slika 5. Pogonsko vratilo podijeljeno na šest segmenata nakon spreznja

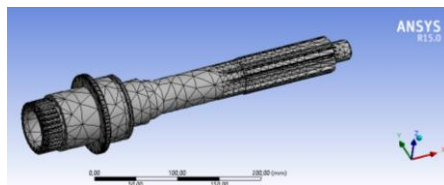
Veza između svakog od segmenata se uzima kao kruta.

2.2 Numerička metoda

Modalni oblici predstavljaju način deformisanja (kretanja) strukture koja vibrira na nekoj sopstvenoj frekvenciji. Numerička modalna analiza je izvršena u software-u Ansys Workbench 12.1 za slučaj slobodno oslonjenog vratila. Prvi korak koji je bio neophodan za modalnu analizu vratila u ovome radu bio je modelovanje vratila (slika 6) i generisanje mreže konačnih elemenata (slika 7).



Slika 6. Model vratila



Slika 7. Generisanje mreže KE

Dobijeni rezultati su prikazani u sljedećoj tački rada.

2.3 Eksperimentalna metoda

Eksperimentalna modalna analiza podrazumijeva eksperimentalno određivanje dinamičkih parametara. Određuju se modalni parametri linearnog sistema nezavisnog od vremena. Ovaj postupak se zasniva na analizi registrovanih funkcija pobude koje se nanose na konstrukciju i vibracija konstrukcije kao odgovora sistema u vremenskom i frekventnom domenu. Modalni parametri (sopstvena frekvencija, prigušenje i modalni oblik) određuju pojedini mod i zavise od geometrije, karakteristika materijala i graničnih uslova. Modalni model opisuje dinamičko ponašanje konstrukcije kao linearnu kombinaciju različitih sopstvenih modova. Da bi se dinamičko ispitivanje provelo, potrebna je oprema za prikupljanje i obradu podataka.

2.3.1 Eksperimentalna postavka

Eksperiment je izveden u Laboratoriji za primijenjenu mehaniku na Mašinskom fakultetu u Istočnom Sarajevu. Cilj eksperimenta je određivanje sopstvenih frekvencija ispitivanog vratila i upoređivanje rezultata sa rezultatima sopstvenih frekvencija dobijenih numeričkim putem, odnosno modalnom analizom u software-skom paketu Ansys Workbench 12.1, kao i sa rezultatima dobijenim analitički. Potrebno je voditi računa o tome da se pri prikupljanju i prenosu podataka izoluju svi dodatni signali iz frekventnog područja od interesa koji pri analizi mogu uzrokovati greške i poteškoće. Oprema za dinamičko ispitivanje se sastoji od nekoliko komponenata, među kojima su pobuđivač, senzor, sistem za prikupljanje podataka, te sistem za analizu ili analizator. Eksperimentalni sistem (slika 8) se sastoji od ispitivanog vratila obješenog o elastično uže, kuglice za pobudu, senzora za kontaktno mjerenje vibracija-akcelerometra i analogne kartice. Za akviziciju podataka i njihovu obradu primijenjena je instrumentacija *National Instruments*, slika 9.



Slika 8. Postavka eksperimenta



Slika 9. Analogna kartica National Instruments

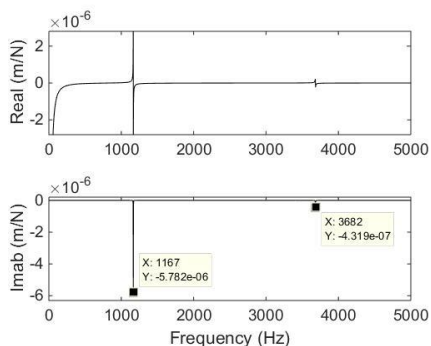
Obješena kuglica je prije udara otklonjena za približno 20° . Udarom kuglice o vratilo izaziva se pobuda. Poklapanjem frekvencija pobude sa sopstvenim frekvencijama vratila dolazi do tzv. rezonance koja je izražena u vidu modova, odnosno pikova na dijagramu frekvencija-amplituda. Zbog osjetljivosti akcelerometra korišćenog u ovome radu, moguće je mjeriti frekvencije reda veličine 10 000 Hz. Princip rada im se zasniva na osobini piezo-električnih kristala da proizvode elektricitet ako su izloženi kompresiji, savijanju ili smicanju.

3 REZULTATI I DISKUSIJA

Kako je prikazano u prethodnom poglavlju, postavljena je analitička osnova za određivanje vrijednosti sopstvenih frekvencija oscilovanja pogonskog vratila mjenjačkog prenosnika DMB 6.80.235 primjenom Ojler-Bernulijeve teorije greda. Vrijednosti sopstvenih frekvencija pomenutog vratila su određene u ranijim istraživanjima na osnovu numeričke analize vršene u Ansys Workbench-u 12.1, kao i na osnovu prikazanog eksperimenta [7].

3.1 Rezultati sopstvenih frekvencija oscilovanja dobijeni analitičkim putem

Rezultati sopstvenih frekvencija određeni analitičkim putem su prikazani na sl. 10.



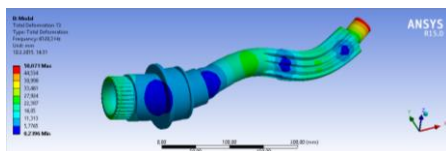
Slika 10. Rezultati sopstvene frekvencije dobijeni analitički

3.2 Rezultati sopstvenih frekvencija oscilovanja dobijeni numeričkim putem

Dobijeni rezultati su dati u tabeli 1, a jedan od oblika oscilovanja na slici 11.

Tabela 1. Rezultati sopstvenih frekvencije dobijeni numeričkom modalnom analizom

Modovi	Vrijednosti sopstvenih frekvencija [Hz]
1.	1170
2.	3309,7



Slika 11. Savojni mod

3.3 Rezultati sopstvenih frekvencija oscilovanja vratila dobijeni eksperimentom

Rezultati eksperimentalne analize su obrađeni u software-u MatLab i OriginPro. Koristila su se oba software-a iz razloga provjere tačnosti dobijenih rezultata. Vrijednosti sopstvenih frekvencija oscilovanja pogonskog vratila dobijene eksperimentalnim putem su prikazane u tabeli 2.

Tabela 2. Rezultati sopstvenih frekvencija dobijeni eksperimentalno

Modovi	Vrijednosti sopstvenih frekvencija [Hz]
1. mod	1166
2. mod	3310

U tabeli 3 su date uporedne vrijednosti rezultata sopstvenih frekvencija oscilovanja pogonskog vratila dobijene analitički i numerički sa eksperimentalnim rezultatima koji su izabrani kao referentni.

Tabela 3. Poređenje analitičkih i numeričkih rezultata sopstvenih frekvencija vratila sa eksperimentalnim rezultatima

Modovi	Vrijednosti sopstvenih frekvencija [Hz]			Odstupanje [%]	
	Analitika	Numerička analiza	Eksperimentalna analiza	A-E	N-E
1. Mod	1167	1170	1166	0,08	0,34
2. Mod	3682	3309,7	3310	10,1	0,01

4 ZAKLJUČAK

Sopstvena frekvencija je frekvencija na kojoj bilo koja dinamička pobuda proizvodi značajan odgovor strukture. Ovo je važno znati zbog toga što i pobuda, koja je bliska strukturnoj sopstvenoj frekvenciji, takođe, proizvodi štetan efekat. U većini slučajeva ovakva pobuda proizveće vibracije strukture koje imaju visok nivo amplitude i koje mogu dovesti do zamora materijala, oštećenja osjetljivijih dijelova strukture i, u ekstremnim slučajevima, do loma i otkaza strukture. Kroz ovo istraživanje prikazano je analitičko određivanje vrijednosti sopstvenih frekvencija oscilovanja posmatranog pogonskog vratila primjenom Ojler-Bernulijeve teorije greda. Dobijeni rezultati su upoređeni sa rezultatima dobijenim na osnovu numeričke modalne analize u software-u Ansys Workbench 12.1 i sa eksperimentalnim rezultatima. Osnovni cilj rada je dobijanje pouzdanog matematičkog modela za izračunavanje sopstvenih frekvencija sprežanjem parcijanih prenosnih funkcija na primjeru pomenutog vratila. Na osnovu uporednih rezultata iz tabele 4 može se ustanoviti da su odstupanja analitičkih rezultata u odnosu na eksperiment zadovoljavajuća, čime je, ujedno, potvrđena korektnost navedenog matematičkog modela zasnovanog na Ojler-Bernulijevoj teoriji greda.

LITERATURA

- [1] Tomáš Jamrůz, Karel Patočka, Vladimír Dániel, Tomáš Horáček (2012). Modal analysis of the rotor system, *20th SVSFEM ANSYS Users' Group*
- [2] Košarac, A. (2016). *Razvoj mašina alatki primjenom virtualnih modela sa posebnim osvrtom na dinamičko ponašanje sklopa glavnog vretena*, Doktorska disertacija, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
- [3] Batinić, V. (2001). Modal analysis of planetary gear trains, *Journal of Mechanical Engineering Design, Vol. 4, No. 1, pp. 17-24*.
- [4] R. P. S. Han, J. W-Z. Zu (1992). Modal analysis of rotating shafts: A body fixed axis formulation approach, *Journal of Sound and Vibration, pp. 11-16*.
- [5] Mahapatra, A., Chatterjee, A. (2015). Comparison of Analytical and Numerical results in Modal analysis of Multispan Continuous beams with LS-DYNA, *10th International LS-DYNA Users Conference, pp. 3-21*.
- [6] Schmitz, L.T., Smith, K.S. (2012) *Mechanical Vibration, Modeling and Measurement, Springer*
- [7] Vučetić, N., Blagojević, M., Košarac, A., Antunović, R. (2016). Experimental verification of numerical gearbox drive shaft modal Analysis results, *Machine Design, Vol. 8, No. 2, ISSN: 1821-1259, pp.57-62*.